

Seismische Wellen

Dieses Vorlesungsmanuskript basiert auf dem Scriptum von meinem hoch geschätzten Kollegen, **Prof. Dr. Gerhard Müller**, Universität Frankfurt, der leider viel zu früh verstorben ist.

Dirk Gajewski, Institut für Geophysik
Universität Hamburg

Vorwort

Mit diesem Skriptum sollen die Studierenden mit einer Grundausbildung in Mathematik und Theoretischer Physik die Grundlagen der Theorie elastischer Wellen vermittelt werden, die für das Studium der Spezialliteratur in Monographien und Zeitschriften notwendig sind. Dem einführenden Charakter entspricht es, dass versucht wurde, Theorie und Methoden an möglichst einfachen Modellen zu erläutern, um den rechentechnischen Aufwand und die Kompliziertheit von Formeln auf ein Minimum zu beschränken. So werden häufig flüssige Medien anstelle von festen betrachtet, oder bei der Untersuchung von Scherwellen in geschichteten festen Medien werden nur horizontal polarisierte Wellen (SH-Wellen) diskutiert. Die Normalmodentheorie für Punktquellen wird, um ein drittes Beispiel zu nennen, für einen idealen Wellenleiter mit freien oder starren Begrenzungen dargestellt. Diese aus didaktischen Gründen notwendigen Vereinfachung lassen den Bezug zur Seismologie über manche Strecken hinweg in den Hintergrund treten. Meines Erachtens gibt es keine andere Wahl, will man Theorien und Methoden im Detail darstellen und doch wenigstens einigen Stoff aus dem bereits recht breiten Gesamtgebiet bringen. Nach der Erarbeitung dieses Skriptums sollen Studenten, so hoffe ich, besser als vorher in der Lage sein, z.B. die anspruchsvolleren Monographien von Pilant (1979), Aki und Richards (1980), Ben-Menahem und Singh (1981) und Kennett (1983) zu lesen, deren Schwerpunkt bei der Behandlung möglichst realistischer Modelle der Wellenausbreitung liegt.

Die Darstellung hat ihren Schwerpunkt bei der wellenseismischen Behandlung elastischer Raum- und Oberflächenwellen in geschichteten Medien. Das Verständnis der dynamischen Eigenschaften dieser beiden Wellentyp, also ihrer Amplituden, Frequenzen und Impulsformen, ist eine wesentliche Voraussetzung für das Studium der Struktur der Erde, sei es in der Kruste, im Mantel oder im Kern, und für das Studium der Vorgänge in Erdbebenherden. Die Strahlenseismik inhomogener Medien und ihr Zusammenhang mit der Wellenseismik werden ausführlicher als in früheren Versionen des Skriptums besprochen, aber seismologisch so interessante Themen wie Eigenschwingungen der Erde und ausgedehnte Quellen elastischer Wellen bleiben weiterhin ausgespart, da sie den Rahmen einer Grundlagen-Vorlesung sprengen würden.

An verschiedenen Stellen im Skriptum sind Übungsaufgaben eingefügt; die Beschäftigung mit ihnen sollte einen wichtigen Teil der Erarbeitung des Stoffs darstellen. Einer der Anhänge versucht, in kompakter Form das Wichtigste über Laplace- und Fourier-Transformation und über die Deltafunktion zu bringen, damit im Hauptteil auf diese Hilfsmittel zurückgegriffen werden kann.

Gerhard Müller

Für das setzen dieses Skriptes im $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ Satzsystem sowie für das Erstellen der Abbildungen mit XFIG bedanke ich mich bei Iulia Coman.

Dirk Gajewski

Kapitel 1

Literatur

Die folgende Liste enthält nur *Bücher*, in denen die Ausbreitung elastischer Wellen behandelt wird, und einige wenige *Lehrbücher* der Kontinuumsmechanik. *Zeitschriftenartikel* werden, soweit nötig, im Text angegeben. Ihre Anzahl ist, dem einführenden Charakter des Skriptums entsprechend, gering. Ein besonders umfassendes Literaturverzeichnis zum Thema Theorie elastischer Wellen enthält das Buch von Pilant.

Achenbach, J.D.: Wave propagation in elastic solid, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1973

Aki, K. und P.G. Richards: Quantitative seismology - theory and methods (2 Bände), Freeman and Co., San Francisco, 1980

Ben-Menahem, A. und S.J. Singh: Seismic waves and sources, Springer, Heidelberg, 1981

Brekhovskikh, L.M.: Waves in layered media, Academic Press, New York, 1960

Brekhovskikh, L., Goncharov, V.: Mechanics of continua and wave dynamics, Springer-Verlag, Berlin, 1985

Budden, K.G.: The wave-guide mode theory of wave propagation, Logos Press, London, 1961

Bullen, K.E., Bolt, B.A.: An introduction to the theory of seismology, Cambridge University Press, Cambridge, 1985

Cagniard, L.: Reflection and refraction of progressive waves, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1962

Červený, V., I.A. Molotov und I. Psencik: Ray method in seismology, Univerzita Karlova, Prag, 1977

Ewing, M., W.S. Jardetzky und F. Press: Elastic waves in layered media, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1957

Fung, Y.C.: Foundations of solid mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1965

Grant, F.S. und G.F. West: Interpretation theory in applied geophysics, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1965

Hahn, H.G.: Elastizitätstheorie, B.G. Teubner, Stuttgart, 1985

Hudson, J.A.: The excitation and propagation of elastic waves, Cambridge University Press, Cambridge, 1980

Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik, Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt, 1977

Kennett, B.L.N.: Seismic wave propagation in stratified media, Cambridge University Press, Cambridge, 1983

Landau, L.D. und E.M. Lifschitz: Elastizitätstheorie, Akademie Verlag, Berlin, 1977

Love, A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edition, Dover Publications, New York, 1944

Pilant, W.L.: Elastic waves in the earth, Elsevier, Amsterdam, 1979

Sommerfeld, A.: Mechanik der deformierbaren Medien, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964

Tolstoy, I.: Wave propagation, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1973

Tolstoy, I. und C.S. Clay: Ocean acoustics-theory and experiment in underwater sound, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1966

White, J.E.: Seismic waves-radiation, transmission and attenuation, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1965

Kapitel 2

Grundlagen der Elastizitätstheorie

Vorbemerkung:

In diesem Grundlagenkapitel wird neben der symbolischen Schreibweise auch die Indexschreibweise verwandt, d.h. ein Vektor (symbolische Schreibweise \vec{f}) wird auch bezeichnet mit f_i (Komponenten f_1, f_2, \dots, f_n), der Ortsvektor (symbolisch \vec{x}) mit x_i (Komponenten x_1, x_2, x_3) und eine Matrix (symbolisch \underline{a}) mit a_{ij} (i =Zeilenindex = $1, 2, \dots, m$, j =Spaltenindex = $1, 2, \dots, n$). Das Produkt der Matrix a_{ij} und des Vektors f_j ist der Vektor

$$g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Eine abgekürzte Schreibweise hierfür ist (*Summationskonvention SK*):

$$g_i = a_{ij} f_j$$

Wenn im folgenden also ein Produkt wie rechts auftritt, in dem derselbe Index zweimal vorkommt, so bedeutet dies, dass dieser Index nacheinander die Werte $1, 2, \dots, n$ (normalerweise $n = 3$) annimmt und alle Produkte zu addieren sind.

Wo die symbolische Schreibweise übersichtlicher ist, z.B. beim Kreuzprodukt zweier Vektoren oder bei Divergenz und Rotation, wird sie verwandt.

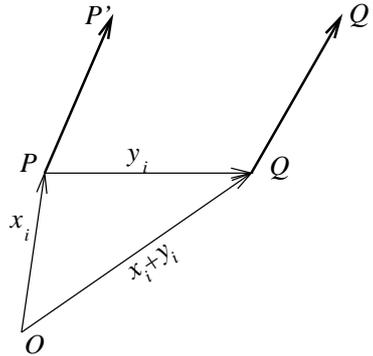
2.1 Analyse des Deformationszustandes

Englisch: Analysis of strain

Zerlegung des Verschiebungsvektors

Wir betrachten einen Körper, der unter dem Einfluss äußerer Kräfte deformiert ist. Im undeformierten Zustand habe der Punkt P den Ortsvektor x_i , der infinitesimal benachbarte Punkt Q den Ortsvektor $x_i + y_i$. Die Komponenten von y_i sollen unabhängige Variable sein, daher wurde nicht dx_i geschrieben. Nach der Verformung ist P um den Verschiebungsvektor u_i nach P' verschoben, und Q nach Q' um den Vektor (Reihenentwicklung bis zu den linearen Gliedern)

$$z_i = u_i + du_i = u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} y_j \quad (\text{SK!}).$$



Der Vektor z_i beschreibt (für wanderndes Q in der Nachbarschaft von P) die Veränderungen, die die Umgebung von P durch die Deformation erfährt. Diese Veränderungen setzt sich im allgemeinen zusammen aus einer Translation, einer Rotation der Umgebung *als Ganzes* um eine Achse durch P und aus der eigentlichen Deformation, bei der Strecken ihre Länge ändern (Rotation und Deformation werden in folgenden noch näher diskutiert):

$$z_i = u_i + du_i = \underbrace{u_i}_{\text{Translation}} + \underbrace{\epsilon_{ij}y_j}_{\text{Deformation}} + \underbrace{\xi_{ij}y_j}_{\text{Rotation}}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (2.2)$$

$$\xi_{ij} = -\xi_{ji} \quad (\Rightarrow \xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{33} = 0) \quad (2.3)$$

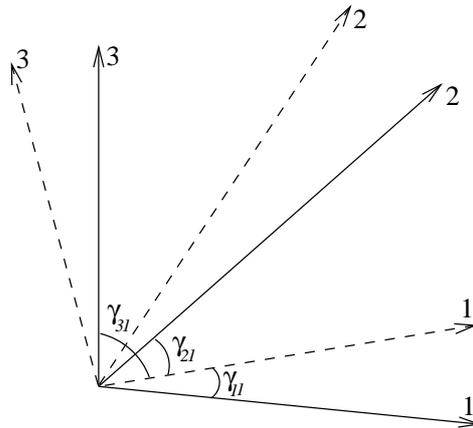
Die Matrizen ϵ_{ij} und ξ_{ij} sind *Tensoren 2. Stufe*. ϵ_{ij} ist wegen 2.2 symmetrisch, ξ_{ij} wegen 2.3 antisymmetrisch. ϵ_{ij} heißt *Deformationstensor*, ξ_{ij} *Rotationstensor*.

Einschub über Tensoren 2. Stufe

Ein Tensor 2. Stufe, t_{ij} , transformiert einen Vektor in einen anderen (ϵ_{ij} transformiert z.B. den Vektor y_i in den Deformationsanteil von du_i ; anderes Beispiel: der Trägheitstensor transformiert den Vektor der Winkelgeschwindigkeit in den Drehimpulsvektor (Rotation eines starren Körpers)). Dreht man das Koordinatensystem, so müssen, damit sich wieder derselbe Vektor ergibt, die Tensorkomponenten wie folgt transformiert werden:

$$\begin{aligned} t'_{kl} &= a_{ik}a_{jl}t_{ij} && \text{(SK zweimal!)} \\ a_{mn} &= \cos \gamma_{mn} && \text{(siehe Skizze)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

t'_{kl} = Tensorkomponente im gedrehten Koordinatensystem (in der Skizze gestrichelt)



Bei einer bestimmten Orientierung des gedrehten Systems (Hauptachsensystem) verschwinden die Nicht-Diagonalkomponenten $t'_{12}, t'_{13}, t'_{21}, \dots$.

Die Koordinatenachsen heißen dann *Hauptachsen* des Tensors, und der Tensor hat *Hauptachsenform*. Im Hauptachsensystem eines Tensors lassen sich viele physikalische Beziehungen einfacher angeben. Gewisse Kombinationen von Tensorkomponenten sind ganz unabhängig vom Koordinatensystem, auf das der Tensor bezogen wird. Dies sind die 3 *Invarianten* (T_1, T_2, T_3 sind die Diagonalkomponenten des Tensors in Hauptachsenform):

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} &= T_1 T_2 T_3 && \text{(Determinante)} \\
 I_2 &= t_{11} + t_{22} + t_{33} &= T_1 + T_2 + T_3 && \text{(Spur)} \\
 I_3 &= t_{11}t_{22} + t_{22}t_{33} + t_{33}t_{11} - \\
 &\quad t_{12}t_{21} - t_{23}t_{32} - t_{31}t_{13} &= T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1
 \end{aligned}$$

Näheres über Tensoren findet man z.B. bei Sommerfeld oder Joos.

Rotationsanteil der Verschiebung

Seine Komponenten folgen aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & \xi_{13} \\ -\xi_{12} & 0 & \xi_{23} \\ -\xi_{13} & -\xi_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{12}y_2 + \xi_{13}y_3 \\ -\xi_{12}y_1 + \xi_{23}y_3 \\ -\xi_{13}y_1 - \xi_{23}y_2 \end{pmatrix} = \vec{\xi} \times \vec{y}$$

$$\text{mit } \vec{\xi} = (-\xi_{23}, \xi_{13}, -\xi_{12}) = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$$

Der Vektor $\vec{\xi} \times \vec{y}$ beschreibt eine *infinitesimale Rotation* der Umgebung von P um eine Achse durch P mit der Richtung von $\vec{\xi}$. Der Drehwinkel hat den Betrag $|\vec{\xi}|$ und ist unabhängig von \vec{y} (man beweise das im einzelnen.) Voraussetzung ist, dass $\vec{\xi}$ wirklich infinitesimal ist.

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad \text{für alle } i \text{ und } j. \quad (2.5)$$

Deformationsanteil der Verschiebung

Nach Abspaltung des Rotationsterms interessiert nur noch der Deformationsanteil, denn nur er sagt etwas aus über die Kräfte, die in dem Körper wirken. Die Deformation ist durch die 6 im allgemeinen voneinander verschiedenen Komponenten ϵ_{ij} vollständig beschrieben. Diese Komponente sollen jetzt physikalisch interpretiert werden.

Der Ausgangspunkt ist

$$du_i = \epsilon_{ij}y_j,$$

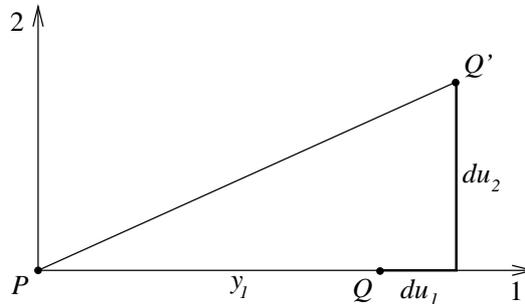
d.h., wir nehmen an, dass keine Rotation auftritt.

a) Bei dieser Deformation bleibt eine Gerade eine Gerade und eine Ebene eine Ebene. Aus einer Kugel wird ein Ellipsoid. Parallelität bleibt erhalten.

b) *Dehnungskomponenten* $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$

Koordinatenursprung in P

Spezielle Wahl von Q : $y_1 \neq 0, y_2 = y_3 = 0$

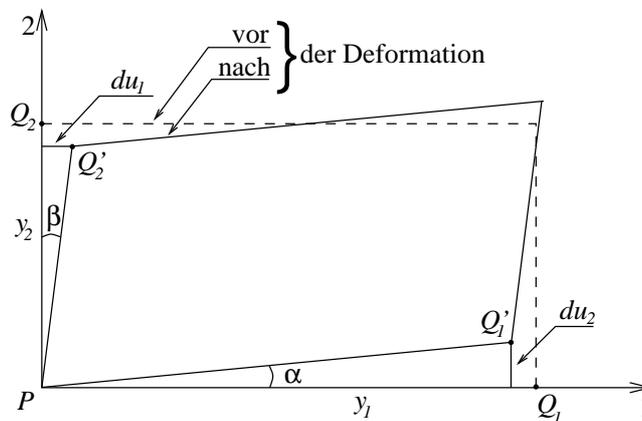


$$\begin{aligned} du_1 &= \epsilon_{11}y_1 \\ du_2 &= \epsilon_{21}y_1 \\ du_3 &= \epsilon_{31}y_1 = 0 \quad (\text{Annahme: } \epsilon_{31} = 0) \end{aligned}$$

$\epsilon_{11} = \frac{du_1}{y_1}$ ist die relative Längenänderung in 1-Richtung (*nicht* die relative Längenänderung von PQ , siehe d)).

Dehnung tritt ein, wenn $\epsilon_{11} > 0$, und Stauchung, wenn $\epsilon_{11} < 0$ ist. Analog sind ϵ_{22} und ϵ_{33} die relativen Längenänderung in 2- bzw. 3-Richtung.

c) *Scherkomponenten* $\epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}$

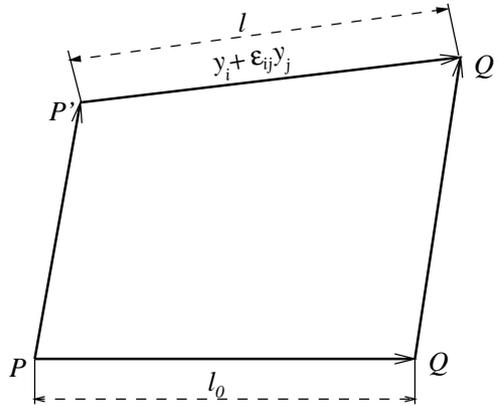


$$\begin{aligned}
Q_1 \rightarrow Q'_1 : du_2 &= \epsilon_{21}y_1 = \epsilon_{12}y_1 \\
Q_2 \rightarrow Q'_2 : du_1 &= \epsilon_{12}y_2 \\
\tan \alpha \simeq \alpha \simeq \frac{du_2}{y_1} &= \epsilon_{12} \\
\tan \beta \simeq \beta \simeq \frac{du_1}{y_2} &= \epsilon_{12}
\end{aligned}$$

Das heißt: ϵ_{12} ist der Winkel, um den die 1- bzw. die 2-Achse gedreht wird. Der ursprünglich rechte Winkel bei P verringert sich um $2\epsilon_{12}$. Wenn das Parallelogramm nach der Deformation nicht mehr in der 1-2-Ebene liegen sollte (weil $\epsilon_{13}, \epsilon_{23}$ oder ϵ_{33} nicht verschwinden), gelten alle Aussagen für seine vertikale Projektion in diese Ebene.

Analoge Resultate gelten für ϵ_{13} und ϵ_{23} .

d) Längenänderung der Strecke \overline{PQ}



$$\begin{aligned}
\overline{PQ} &= l_0 = \left\{ \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right\}^{1/2} \\
\overline{P'Q'} &= l = \left\{ \sum_{i=1}^3 (y_i + \epsilon_{ij} y_j)^2 \right\}^{1/2} = \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^3 y_i^2 + 2\epsilon_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^3 (\epsilon_{ij} y_j)^2 \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

Der 3. Term enthält nur Quadrate der ϵ_{ij} und ist im Rahmen einer *Theorie infinitesimaler Deformationen* (englisch: infinitesimal strain theory), um die es hier geht, gegenüber dem 2. Term zu vernachlässigen (die Voraussetzung hierfür ist (2.5)):

$$l = l_0 \left(1 + \frac{2}{l_0^2} \epsilon_{ij} y_i y_j \right)^{1/2} \approx l_0 + \frac{1}{l_0} \epsilon_{ij} y_i y_j \quad ,$$

wobei wir hier die Wurzel entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen haben. Relative Längenänderung:

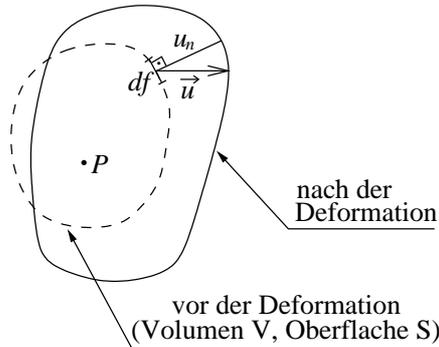
$$\frac{l - l_0}{l_0} = \epsilon_{ij} \frac{y_i y_j}{l_0^2} = \epsilon_{ij} n_i n_j \quad (\text{quadratische Form in den } n_k)$$

$$n_i = \frac{y_i}{l_0} = \text{Einheitsvektor in Richtung von } y_i$$

Es gibt auch Ansätze zu einer *Theorie endlicher Deformationen* (englisch: finite strain theory, vgl. das Buch von Biot und Bold). Eine solche Theorie muss aber ganz von vorn entwickelt werden. Zum Beispiel gilt dann nicht mehr die einfache Abspaltung eines Rotationsterms im Verschiebungsvektor, die bei infinitesimalen Deformationen möglich ist. Auch der Deformationstensor ϵ_{ij} wird komplizierter.

e) *Volumenänderung (kubische Dilatation)*

Wir betrachten ein endliches (nicht infinitesimales) Volumen V , das den Punkt P enthält. Seine Oberfläche sei S . Nach der Deformation, bei der wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass P seine Lage beibehält, ist das Volumen um ΔV verändert:



$$\Delta V = \int_S u_n df$$

Umwandlung dieses Flächenintegrals mit Hilfe des Gaußschen Satzes:

$$\Delta V = \int_V \text{div } \vec{u} dv$$

Relative Volumenänderung:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V} \int_V \text{div } \vec{u} dv \quad (2.6)$$

Nun Grenzübergang $V \rightarrow 0$ (Zusammenziehung auf den Punkt P):

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V} = \Theta$$

Dieser Grenzwert heißt *kubische Dilatation*.

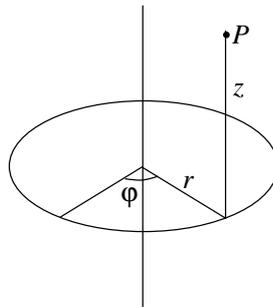
Aus 2.6 folgt zusammen mit 2.1:

$$\Theta = \text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad (\text{Spur des Deformationstensors})$$

$\Theta > 0$ bedeutet Volumenvergrößerung, $\Theta < 0$ Kompression.

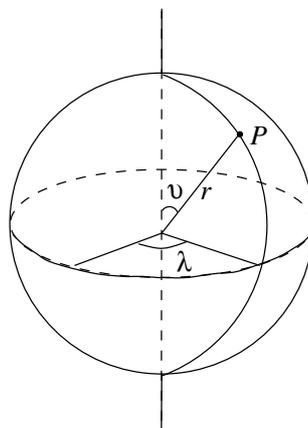
Komponenten des Deformationstensors in Zylinder- und Kugelkoordinaten (vgl. Übung 2.3)

Zylinderkoordinaten r, φ, z :



$$\begin{aligned}\vec{u} &= (u_r, u_\varphi, u_z) \\ \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ 2\epsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \\ 2\epsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 2\epsilon_{\varphi z} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten r, ϑ, λ :



$$\begin{aligned}
\vec{u} &= (u_r, u_\vartheta, u_\lambda) \\
\epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
\epsilon_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} \\
\epsilon_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cot \vartheta}{r} u_\vartheta \\
2\epsilon_{r\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \\
2\epsilon_{r\lambda} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \lambda} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} - \frac{u_\lambda}{r} \\
2\epsilon_{\vartheta\lambda} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \vartheta} - \frac{\cot \vartheta}{r} u_\lambda
\end{aligned}$$

Übung 2.1:

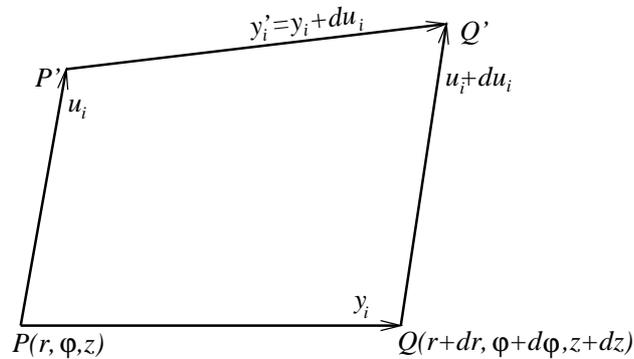
Wie verformt sich ein Quader, dessen Kanten parallel zu den Achsen des Hauptachsensystems des Deformationstensors sind (Kantenlängen a, b, c)?

Übung 2.2:

Man zerlege den Deformationstensor in einen Anteil, der eine reine Scherung (ohne Volumenänderung) darstellt, und in einen Anteil, der eine reine Volumenänderung (ohne Scherung) darstellt.

Übung 2.3:

Man leite die Komponenten des Deformationstensors in Zylinderkoordinaten ab. Hinweise:



Bezogen auf das lokale kartesische Koordinatensystem in P ist:

$$\begin{aligned}
y_1 &= dr & u_1 &= u_r \\
y_2 &= rd\varphi & u_2 &= u_\varphi \\
y_3 &= dz & u_3 &= u_z
\end{aligned}$$

Man bestimme zunächst die Zylinderkoordinaten von P' und Q' unter der Voraussetzung infinitesimaler Verschiebung und Deformationen. Dann gebe man die Komponenten des Vektors $y'_i = y_i + du_i$ im lokalen kartesischen Koordinatensystem von P' an, in Analogie zur Festlegung von y_i im System von P . Dabei ist zu linearisieren. Hieraus kann man den Vektor du_i in der Form

$$du_i = v_{ij} y_j$$

ableiten und den Tensor v_{ij} bestimmen. Der Deformationstensor ist der symmetrische Anteil von v_{ij} .

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{ij} + v_{ji})$$

2.2 Analyse des Spannungszustandes

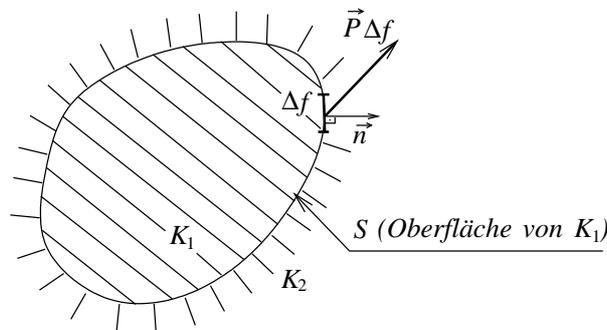
Englisch: Analysis of stress

Spannung

Im deformierten Zustand wirken auf ein Volumenelement des Körpers im allgemeinen *Volumenkräfte* (proportional zum Volumen; Beispiele: Schwerkraft, Zentrifugalkraft, Trägheitskraft) und *Flächenkräfte*, die von den benachbarten Volumenelementen herrühren (proportional zur Fläche). Um die letzteren geht es hier. Wir betrachten in einem deformierten Körper einen Teilkörper K_1 , der von K_2 umgeben ist. Wenn man K_2 entfernt, so wird K_1 im allgemeinen eine neue Gleichgewichtskonfiguration annehmen. Daraus ist zu schließen, dass K_2 durch S hindurch Kräfte auf K_1 ausgeübt hat. Um K_1 wieder in seine alte Form zu bringen, muss man Ersatzkräfte $\vec{P} \Delta f$ (Δf =Flächenelement) auf S anbringen.

Dieselben Kräfte übt auch K_2 aus. \vec{P} mit der Dimensionen Kraft/Fläche heißt *Spannungsvektor* (englisch: traction). Seine Richtung und Größe hängen ab

1. vom Ort des Flächenelements Δf ,
2. von seiner Normalenrichtung \vec{n} (definiert als die aus K_1 herauszeigende Richtung).



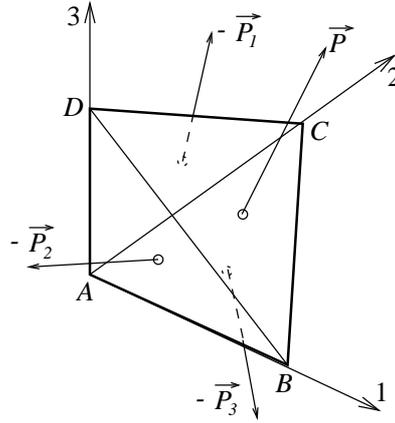
Komponente von \vec{P} parallel zu \vec{n} : Normalspannung (= Zug- oder Druckspannung)

Komponente von \vec{P} senkrecht zu \vec{n} : Tangentialspannung oder Scherspannung oder Schubspannung

Wenn man \vec{P} im ganzen Körper und für alle Richtungen \vec{n} kennt, kennt man den Spannungszustand des Körpers. Hierzu muss man 6 Funktionen kennen, wie wir sogleich sehen werden.

Spannungstensor p_{ij}

Wir betrachten in dem Körper einen infinitesimalen Tetraeder $ABCD$ und nehmen an, dass wir die Spannungsvektoren der 3 Flächen ABD , ABC , und ACB kennen.



Wir wollen hieraus den Spannungsvektor \vec{P} von BCD berechnen. Wegen der Kleinheit des Tetraeders sind alle Spannungsvektoren über die zugehörigen Flächen konstant. Normalenrichtungen und Flächen:

ABD : negative 2-Richtung, Δf_2

ABC : negative 3-Richtung, Δf_3

ACD : negative 1-Richtung, Δf_1

BCD : $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, Δf

$$\Delta f_j = \Delta f n_j \quad (2.7)$$

Wir nehmen an, dass Kräfte und Spannungsvektoren auf ABD , ABC und ACD für die *positive* 2- bzw. 3- bzw. 1-Richtung bekannt sind:

ABD : $\vec{P}_2 \Delta f_2$, $\vec{P}_2 = (p_{21}, p_{22}, p_{23})$

ABC : $\vec{P}_3 \Delta f_3$, $\vec{P}_3 = (p_{31}, p_{32}, p_{33})$

ACD : $\vec{P}_1 \Delta f_1$, $\vec{P}_1 = (p_{11}, p_{12}, p_{13})$

Das heißt, die 9 Funktionen p_{ij} seien bekannt. Die Kräftebilanz am Tetraeder ergibt bei Vernachlässigung der Volumenkkräfte (sie gehen mit Verkleinerung des Tetraeders schneller gegen Null als die Flächenkräfte):

$$-\vec{P}_j \Delta f_j + \vec{P} \Delta f = 0$$

Mit 2.7 erhält man:

$$\vec{P} = \vec{P}_j n_j \quad (2.8)$$

Dieses Ergebnis besagt: Es genügt, die Spannungsvektoren für 3 aufeinander senkrechte Flächenelemente zu kennen, um für ein beliebig orientiertes Flächenelement den Spannungsvektor bestimmen zu können. In reiner Indexschreibweise lautet 2.8 (Achtung: P_j ist eine Komponente von \vec{P} , \vec{P}_j ist ein Vektor):

$$P_1 = p_{11}n_1 + p_{21}n_2 + p_{31}n_3$$

Allgemein: $P_j = p_{ij}n_i$ (SK!)

Die 9 Funktionen p_{ij} bilden den *Spannungstensor*. Er bezieht sich auf ein bestimmtes rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Komponenten p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} ergeben den Spannungsvektor für ein Flächenelement, dessen Normale in die Richtung der (positiven) i -Achse zeigt. p_{ii} (d.h. p_{11}, p_{22} , oder p_{33}) ist die Normalspannung, die beiden anderen Komponenten sind die Tangentialspannungen. Wie im nächsten Abschnitt (Übung 2.6) gezeigt wird, ist der Spannungstensor symmetrisch, d.h.

$$p_{ij} = p_{ji}.$$

Damit gilt auch $P_j = p_{ji}n_i$ oder (übliche Schreibweise)

$$P_i = p_{ij}n_j. \quad (2.9)$$

Der Spannungstensor hat 6 im allgemein voneinander verschiedene Komponenten.

Übung 2.4:

- Man gebe den Spannungstensor für hydrostatischen Druck p an.
- Wie lautet der Spannungstensor im Innern einer unendlich ausgedehnten Platte, deren einer Rand festgehalten wird, während am anderen überall die Scherspannung τ in derselben Richtung angreift?

Übung 2.5:

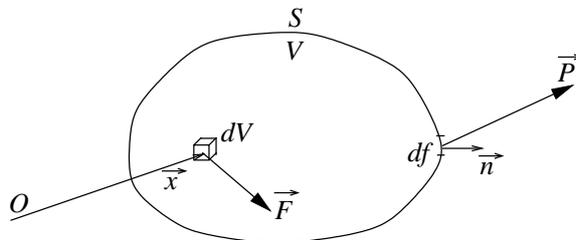
Man beweise: Ist \vec{P} der Spannungsvektor zur Richtung \vec{n} und \vec{P}' derjenige zur Richtung \vec{n}' , so gilt $\vec{P} \cdot \vec{n}' = \vec{P}' \cdot \vec{n}$.

2.3 Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen für ein beliebiges endliches Volumen V in einem deformierbaren Körper fordern, dass die resultierende Kraft und das resultierende Drehmoment verschwinden:

$$\int_V \vec{F} dV + \int_S \vec{P} df = 0 \quad (\text{resultierende Kraft}) \quad (2.10)$$

$$\int_V (\vec{x} \times \vec{F}) dV + \int_S (\vec{x} \times \vec{P}) df = 0 \quad (\text{resultierendes Moment}) \quad (2.11)$$



\vec{F} = Volumenkräfte einschließlich Trägheitskraft (Dimension Kraft/ Volumen= Kraftdichte)

\vec{P} = Spannungsvektor auf S (Normale \vec{n} nach außen)

Gleichung 2.10 ergibt die Bewegungsgleichung des elastischen Kontinuums. Komponentenweise gilt (man kann nur kartesische Koordinaten verwenden):

$$\int_V F_i dV + \int_S P_i df = \int_V F_i dV + \int_S p_{ij} n_j df = 0$$

$p_{ij} n_j$ lässt sich auffassen als Normalkomponente P_{in} des Spannungsvektors $\vec{P}_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})$, bezogen auf die i -Richtung. Anwendung des Gaußschen Satzes ergibt:

$$\int_S P_{in} df = \int_V \operatorname{div} \vec{P}_i dV$$

Damit:

$$\int_V (F_i + \operatorname{div} \vec{P}_i) dV = 0$$

Das gilt für jedes beliebige Volumen V . Daher muss der Integrand verschwinden:

$$F_i + \frac{\partial p_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{i3}}{\partial x_3} = 0$$

oder

$$F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{SK!})$$

Zerlegung von F_i : $F_i = -\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} + f_i$ (ρ = Dichte).

Der erste Term ist die Trägheitskraft; f_i enthält alle übrigen Volumenkräfte. Im Rahmen einer Theorie infinitesimaler Deformationen kann die substantielle Differentiation $\frac{d}{dt}$ durch die lokale, d.h. partielle $\frac{\partial}{\partial t}$, ersetzt werden:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \approx \frac{\partial A}{\partial t} \quad (A = \text{infinitesimale Größe, z.B. } u_i)$$

Damit erhält man die *Bewegungsgleichung*:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (2.12)$$

In der Ruhelage ist normalerweise $p_{ij} \neq 0$: die dann vorhandenen Spannungen nennt man *Eigenspannungen* (englisch: initial stress). Zum Beispiel entstehen sie in der Technik beim Abkühlen von Werkstücken, die aus mehreren Materialien mit verschiedenen thermischen Ausdehnungskoeffizienten bestehen, oder im Falle der Erde durch Selbstkompression im eigenen Schwerfeld (in diesem Fall bestehen die Eigenspannungen in einem hydrostatischen Druck). In der Ruhelage eines Körpers sei $p_{ij} = p_{ij}^{(0)}$ und $f_i = f_i^{(0)}$. Dann gilt (2.12) ebenfalls:

$$\frac{\partial p_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + f_i^{(0)} = 0 \quad (2.13)$$

Nun werde der vorgespannte Körper durch zusätzliche zeitabhängige Volumenkräfte deformiert (zum Beispiel trete in der vorgespannten Erde ein Erdbeben auf). Bei hinreichend kleinen zusätzlichen Spannungen (und nur bei ihnen) ist die folgende Zerlegung sinnvoll:

$$p_{ij} = p_{ij}^{(0)} + p_{ij}^{(1)} \quad f_i = f_i^{(0)} + f_i^{(1)}$$

Mit (2.13) folgt dann aus (2.12):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + f_i^{(1)}$$

Das heißt: Die Verschiebung u_i aus der vorgespannten Ruhelage hängt nur von den zusätzlichen Spannungen und den zusätzlichen Volumenkräften ab. Im folgenden werden wir p_{ij} und f_i in (2.12) immer in diesem Sinne verstehen, d.h. in der Ruhelage ist $p_{ij} = 0$ und $f_i = 0$. Diese Annahme ist ausreichend für das Studium elastischer Raum- und Oberflächenwellen in der Erde. Bei der Untersuchung von Eigenschwingungen und Gezeitenbewegungen, bei denen große Tiefenbereiche und zum Teil der ganze Erdkörper schwingen, muss man aber in (2.12) unter p_{ij} den vollständigen Spannungstensor, einschließlich des hydrostatischen Anteils, verstehen und unter f_i sämtliche äußere Kräfte, einschließlich der Gravitationskraft der Erde selbst. Der Grund ist die Größe des hydrostatischen Drucks, die dazu führt, dass bei Deformationen die Änderungen dieses Drucks nicht vernachlässigt werden dürfen. *Einfaches Beispiel:* die radialen Eigenschwingungen einer Kugel haben bei Berücksichtigung von hydrostatischem Druck und Gravitationskraft *größere* Perioden (Destabilisierung).

Übung 2.6:

Man stelle die Bewegungsgleichung auf, ohne die Symmetrie des Spannungstensors p_{ij} vorauszusetzen, und leite dann diese Symmetrie aus der Momentengleichung (2.11) ab. Hinweise: Im ersten Teil benutze man statt (2.9) den Spannungsvektor in der zunächst gefundenen Form $P_i = p_{ij}n_j$. Im zweiten Teil schreibe man (2.11) komponentenweise und verwende das Ergebnis des ersten Teils.

2.4 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Englisch: Stress-strain relations

Verallgemeinertes Hookesches Gesetz

Wenn in einem Körper Deformationen aus einer ungestörten Konfiguration heraus existieren, verbunden mit der Längenänderung von Strecken, so treten in ihm Spannungen auf. Das bedeutet, dass an jedem Punkt des Körpers ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungstensors und denen des Deformationstensors besteht:

$$p_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{33} : a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (2.14)$$

Als unabhängige Variable können aber, wie angedeutet, noch andere Größen a_k auftreten, etwa die Zeit oder die Temperatur. In noch allgemeinerer Weise kann p_{ij} zum Zeitpunkt t abhängen von der gesamten Vorgeschichte, d.h. vom Zustand für alle Zeiten τ mit $-\infty < \tau < t$. Wenn z.B. ein Balken zu irgendeiner Zeit unter extremen Biegebeanspruchungen stand, so wird sein Biegeverhalten danach anders sein als davor. Die allgemeine Untersuchung von (2.14) und eine entsprechende Klassifizierung von Materialien als elastisch, plastisch, viskoelastisch etc. ist Gegenstand der *Rheologie*. Für die Seismologie ist fast immer die einfachste Form von (2.14) ausreichend, dass nämlich p_{ij} an einem Punkt nur von den Momentanwerten der ϵ_{kl} an diesem Punkt abhängt. In diesem Fall hat $\epsilon_{kl} = 0$ $p_{ij} = 0$ zur Folge: wenn die Deformation aufhört, verschwinden die Spannungen ohne Verzögerung. Das heißt:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= f_{ij}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{33}) \\ f_{ij}(0, 0, \dots, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Wenn solche ein Zusammenhang existiert, spricht man von *idealer Elastizität*. Bei infinitesimalen Deformationen bedeutet dies, dass p_{ij} eine lineare Funktion aller ϵ_{kl} ist (Reihenentwicklung von (2.15) um $\epsilon_{kl} = 0$):

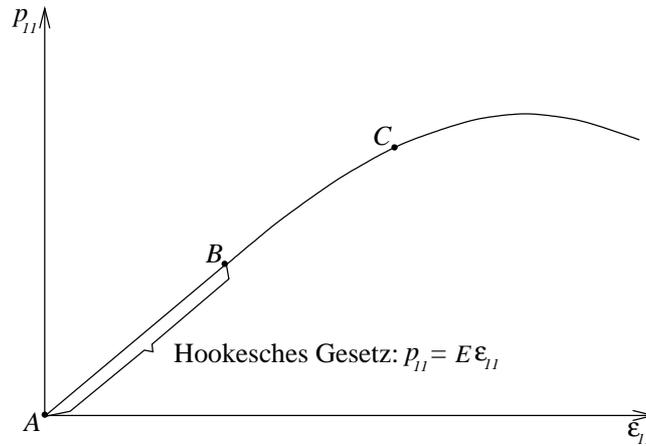
$$\begin{aligned} p_{ij} &= c_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (\text{SK zweimal!}) \\ c_{ijkl} &= \text{Elastizitätskonstanten} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die *lineare Elastizitätstheorie* untersucht elastische Vorgänge in Körpern unter folgenden Annahmen:

1. Die Deformationen sind infinitesimal
2. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen sind linear

Die entscheidende Annahme ist 1.

Das bekannte *Hookesche Gesetz*, etwa für die Dehnung eines Drahtes oder die Scherung eines Quaders, ist ein Spezialfall von (2.16). (2.16) heißt daher auch verallgemeinertes Hookesches Gesetz. Sein Geltungsbereich muss durch Experimente oder Beobachtungen bestimmt werden. Der Zusammenhang in der folgenden Skizze gilt zum Beispiel für die Dehnung eines Drahtes. Zwischen A und B ist der Zusammenhang zwischen der Zugkraft pro Flächeneinheit



des Querschnittes p_{11} und der relativen Längeänderung ϵ_{11} linear und entspricht daher (2.16) (E = Elastizitätsmodul). Zwischen B und C ist der Zusammenhang nicht mehr linear, entspricht aber immer noch ideal elastischem Verhalten, d.h. wenn p_{11} auf Null zurückgeht, bleibt keine Deformation ϵ_{11} übrig. Jenseits von C beobachtet man irreversible Deformationen (plastisches Verhalten, Fließen). Schließlich reißt der Draht.

Der Tensor 4. Stufe c_{ijkl} hat 81 (=9 x 9) Komponenten, von denen wegen der Symmetrie des Deformations- und des Spannungstensors nur 36 (= 6 x 6) voneinander verschieden sind. Weil die elastische Deformationsenergie (= elastische Energie pro Volumeneinheit) eine Zustandsgröße ist, reduziert sich diese Zahl auf 21 (vgl. z.B. S. 268/69 bei Sommerfeld). Das ist allerdings die maximale Zahl der Elastizitätskonstanten, die ein *anisotroper* Körper haben kann. Bei verschiedenen speziellen Formen von Anisotropie und insbesondere bei Isotropie reduziert sich diese Zahl weiter. Beim isotropen Körper, in dem es keine Vorzugsrichtungen gibt, hat man 2 Elastizitätskonstanten. Die *Spannungs-Dehnungs-Beziehungen* (2.16) lauten hier:

$$p_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.17)$$

λ und μ : Lamésche Elastizitätskonstanten oder Elastizitätsparameter (sie können Ortsfunktionen sein)

$\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$: kubische Dilatation

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$: Kroneckersymbol oder auch Einheitstensor

Ableitung von (2.17):

Wir wählen als Koordinatensystem das Hauptachsensystem des Spannungstensors, das bei Isotropie mit dem des Deformationstensors übereinstimmt. Wir haben also die Hauptspannungen P_1, P_2, P_3

und die Hauptdeformationen E_1, E_2, E_3 , zwischen denen ein linearer Zusammenhang besteht. Dieser ist im Falle von Isotropie:

$$\begin{aligned} P_1 &= aE_1 + b(E_1 + E_2) \\ P_2 &= aE_2 + b(E_1 + E_3) \\ P_3 &= aE_3 + b(E_1 + E_2) \end{aligned}$$

Der Koeffizient von E_2 und E_3 in der Gleichung für P_1 muss derselbe sein, da im isotropen Körper die Hauptachsen 2 und 3 gleichartig zur Hauptspannung P_1 beitragen. Analoges gilt für die beiden anderen Gleichungen. Man kann schreiben

$$\begin{aligned} P_i &= (a - b)E_i + b(E_1 + E_2 + E_3) \\ &= 2\mu E_i + \lambda(E_1 + E_2 + E_3), \end{aligned} \quad (2.18)$$

wo die Konstanten a und b durch die Laméschen Parameter λ und μ ersetzt worden sind. Damit ist (2.17) bereits für das Hauptachsensystem bewiesen, in dem es allerdings keine Scherkomponenten des Deformationstensors und Scherspannungen gibt.

Nach dem Gesetz (2.4) zur Transformation von Tensorkomponenten gilt für die Spannungs- und Deformationskomponenten in einem beliebigen Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} p_{11} &= a_{11}^2 P_1 + a_{21}^2 P_2 + a_{31}^2 P_3 & \epsilon_{11} &= a_{11}^2 E_1 + a_{21}^2 E_2 + a_{31}^2 E_3 \\ p_{22} &= a_{12}^2 P_1 + a_{22}^2 P_2 + a_{32}^2 P_3 & & \vdots \\ p_{12} &= a_{11}a_{12}P_1 + a_{21}a_{22}P_2 + a_{31}a_{32}P_3 & \epsilon_{12} &= a_{11}a_{12}E_1 + a_{21}a_{22}E_2 + a_{31}a_{32}E_3 \\ p_{23} &= a_{12}a_{13}P_1 + a_{22}a_{23}P_2 + a_{32}a_{33}P_3 & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Für die Richtungscosinus gilt:

$$a_{ik}a_{il} = \delta_{kl} \quad (\text{SK!})$$

Setzt man (2.18) in die linken Gleichungen von (2.19) ein und benutzt dabei die rechten Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} p_{11} &= 2\mu\epsilon_{11} + \lambda(E_1 + E_2 + E_3) \\ p_{22} &= 2\mu\epsilon_{22} + \lambda(E_1 + E_2 + E_3) \\ p_{12} &= 2\mu\epsilon_{12} \\ p_{23} &= 2\mu\epsilon_{23} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Die Beziehungen für die Scherspannungen haben bereits die endgültige Form, diejenige für die Normalspannungen lassen sich leicht mit Hilfe der Tensorinvariante $E_1 + E_2 + E_3 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ auf die endgültige Form bringen. Damit ist (2.17) bewiesen.

In kartesischen Koordinaten lautet (2.17) komponentenweise, wenn man ϵ_{kl} über (2.1) durch die Ableitungen des Verschiebungsvektors ausdrückt:

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (\text{keine SK!}) \\ p_{ij} &= \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

(2.17) gilt auch in beliebigen krummlinigen orthogonalen Koordinaten, etwa Zylinder- oder Kugelkoordinaten. Man muss nur den Deformationstensor in diesen Koordinaten angeben (vgl. S. 13). Die

p_{ij} beziehen sich dann natürlich auf die Koordinatenflächen des betreffenden Systems. Schließlich sei nochmals darauf hingewiesen, dass die p_{ij} normalerweise als zusätzliche Spannung zu verstehen sind, die sich einem vorgespannten Zustand überlagern.

Die Annahme, dass Gesteine und die Materie des tieferen Erdinnern isotrop sind, ist nach aller Erfahrung häufig berechtigt. Die Kristalle, aus denen die gesteinsbildenden Minerale aufgebaut sind, sind allerdings zumeist anisotrop, ihre fast immer regellose Anordnung lässt das Gestein aber makroskopisch isotrop erscheinen.

Ergänzungen

Thermoelastische Spannungs-Dehnungs-Beziehungen: Sie sind ein Beispiel für Beziehungen, bei denen die Spannungen nicht nur von den Deformationen abhängen, sondern auch noch von anderen Größen, z.B. von der Temperatur ($\alpha =$ Volumenausdehnungskoeffizient, $T - T_0 =$ Temperaturänderung):

$$P_{ij} = \alpha\Theta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}$$

Zusammenhang zwischen λ und μ und anderen Elastizitätsparametern:

$E =$ Elastizitätsmodul (englisch: Young's Modulus)

$\sigma =$ Poissonsches Verhältnis oder Querkontraktionszahl

$k =$ Kompressionsmodul oder Inkompessibilität (englisch: bulk modulus)

$\tau =$ Schermodul (englisch: rigidity)

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} & \sigma &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} & k &= \lambda + \frac{2}{3}\mu \\ \tau &= \mu & \lambda &= \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} & \mu &= \frac{E}{2(1 + \sigma)} \end{aligned}$$

In idealen Flüssigkeiten ist $\tau = \mu = 0$; sie setzen Scherungen keinen Widerstand entgegen. Dann ist $k = \lambda = 0$ und $\sigma = 0.5$. Im Rahmen der Elastizitätstheorie unterscheiden sich Flüssigkeiten und Gase nicht. Der Kompressionsmodul von Flüssigkeiten ist aber erheblich größer als der von Gasen. Das Poissonsche Verhältnis σ kann nur Werte zwischen 0 und 0.5 annehmen. Für Gesteine liegt σ oft nahe bei 0.25; $\sigma = 0.25$ bedeutet $\lambda = \mu$.

Übung 2.7:

Man beweise die Formel für k . k ist definiert als das Verhältnis $-\frac{p}{\Theta}$ in einem Versuch, bei dem ein Körper unter allseitigem Druck p steht und die relative Volumenänderung $\Theta < 0$ erfährt. Man stelle den Deformations- und den Spannungstensor auf und schreibe die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen nieder.

Übung 2.8:

Man beweise die Formeln für E und σ . E ist definiert als das Verhältnis $\frac{p_{11}}{\epsilon_{11}}$ und σ als das Verhältnis $-\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}$ in einem Versuch, bei dem ein Draht oder Stab in 1-Richtung unter der Zugkraft p_{11} steht ($\epsilon_{11} =$ Dehnung, $\epsilon_{22} =$ Querkontraktion, $\epsilon_{33} = ?$, $p_{22} = ?$, $p_{33} = ?$). Man gehe wie bei Übung 2.7 vor.

2.5 Bewegungsgleichung, Rand- und Anfangsbedingungen

Bewegungsgleichung

Setzt man 2.17 in die von p_{ij} abhängige Bewegungsgleichung 2.12 ein, so erhält man diese ganz in Abhängigkeit von den Komponenten des Verschiebungsvektors:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}) + f_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda\Theta) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i \end{aligned} \quad (2.20)$$

Wenn λ und μ ortsunabhängig sind, wird daraus:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + f_i \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + f_i\end{aligned}\quad (2.21)$$

Das ist die *Bewegungsgleichung des homogenen Mediums* in kartesischen Koordinaten.

Symbolische Schreibweise ($\Theta = \text{div } \vec{u}$):

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}\quad (2.22)$$

Das gilt ebenfalls nur für kartesische Koordinaten. $\nabla^2 \vec{u}$ ist der Vektor $(\nabla^2 u_1, \nabla^2 u_2, \nabla^2 u_3)$. In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\nabla^2 \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}\quad (2.23)$$

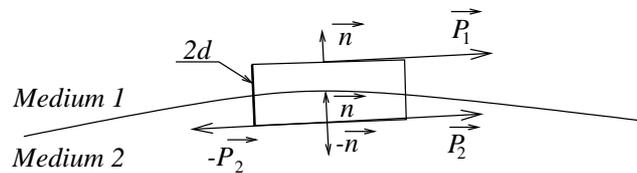
Man überzeuge sich davon durch Nachrechnen; in krummlinigen orthogonalen Koordinaten definiert 2.23 den Vektor $\nabla^2 \vec{u}$, und er ist nicht identisch mit dem Vektor, der durch Anwendung von ∇^2 auf die Komponenten folgt). Setzt man 2.23 in 2.22 ein, so wird:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} + \vec{f}\quad (2.24)$$

Diese Form der Bewegungsgleichung ist unabhängig vom Koordinatensystem. Sie ist der Ausgangspunkt für alles weitere. Nach S.18 enthält \vec{f} nur die Volumenkräfte, die zusätzlich zu denen in der Ruhelage wirken.

Randbedingungen

In einer Fläche, in der mindestens eine der Materialgrößen ρ , λ und μ unstetig ist, ist der Spannungsvektor, bezogen auf die Normalenrichtung dieser Fläche, stetig. Zum Beweis betrachten wir einen kleinen flachen Kreiszyylinder der Dicke $2d$, der die Trennfläche zwischen den beiden Medien umschließt. Die Summe aller Kräfte, die an dem Zylinder angreifen (Volumenkräfte im Innern, Flächenkräfte an seiner Oberfläche) muss verschwinden.



Im Grenzübergang $d \rightarrow 0$ braucht man nur die Flächenkräfte an den Stirnflächen zu betrachten, deren Größe Δf sei:

$$\vec{P}_1 \Delta f + (-\vec{P}_2) \Delta f = 0$$

Hieraus folgt $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$. Das bedeutet, dass in Trennflächen *Normal- und Tangentialspannungen stetig* sind.

Für die Verschiebungen gilt: in einer Trennfläche fest-fest sind alle Komponenten stetig (Gleiten sei ausgeschlossen), in einer Trennfläche fest-flüssig nur die Normalverschiebung.

Beispiele: Ein Körper bestehe aus zwei Halbräumen, die durch die Ebene $z = 0$ getrennt werden. Die Verschiebungen seien u_x, u_y, u_z , die Spannungen $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz}$. Die Randbedingungen für $z = 0$ lauten für die verschiedenen Halbraum-Kombinationen:

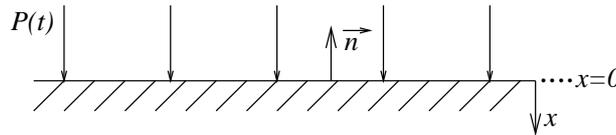
fest – fest	:	$u_x, u_y, u_z, p_{xz}, p_{yz}, p_{zz}$ stetig	
fest – flüssig	:	u_z, p_{zz} stetig, $p_{xz} = p_{yz} = 0$	
flüssig – flüssig	:	u_z, p_{zz} stetig	
fest – starr	:	$u_x = u_y = u_z = 0$	
flüssig – starr	:	$u_z = 0$	
fest – Vakuum	:	$p_{xz} = p_{yz} = p_{zz} = 0$	} freie Oberfläche
flüssig – Vakuum	:		

Wenn in einer Oberfläche mit dem Normalenvektor n_i die Spannungen nicht verschwinden, sondern vorgeschrieben sind (Spannungsvektor P_i), muss der Spannungsvektor im Körper diese Randwerte annehmen:

$$P_{ij}^{(r)} n_j = P_i \quad (2.25)$$

$P_{ij}^{(r)}$ sind die Randwerte der Komponenten des Spannungstensors in der Oberfläche und können aus 2.25 ausgerechnet werden.

Beispiel: Druck $P(t)$ auf einer ebenen Oberfläche



$$\vec{n} = (-1, 0, 0) = (n_1, n_2, n_3)$$

$$\vec{P} = (P(t), 0, 0) = (P_1, P_2, P_3)$$

2.25 ergibt: $-p_{i1}^{(r)} = P_i$ oder

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= p_{xx} = -P(t) \\ p_{12} &= p_{xy} = 0 \\ p_{13} &= p_{xz} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } x = 0.$$

Ähnlich können auf einer Randfläche des Körpers die Verschiebungen vorgeschrieben sein.

Anfangsbedingungen

Sie legen die räumliche Verteilung gewisser Größen, in unserem Falle der Verschiebung $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ und der Partikelgeschwindigkeit $\partial u_i / \partial t$ für $t = 0$ fest:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, 0) = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, 0) = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

Das allgemeinste Wellenausbreitungsproblem ist ein Rand- und Anfangswertproblem, d.h. neben der Bewegungsgleichung sind noch Rand- und Anfangsbedingungen zu erfüllen. Bei seismologischen Problemen ist normalerweise $f_1 = f_2 = 0$, und man muss sich nicht speziell bemühen, diese Anfangswerte zu befriedigen. Diese Probleme sind im wesentlichen Randwertprobleme.

2.6 Verschiebungspotentiale und Wellentypen

Verschiebungspotentiale

Ein Vektor \vec{u} lässt sich unter sehr allgemeinen Voraussetzungen wie folgt darstellen:

$$\vec{u} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\vec{\Psi} \quad (2.26)$$

Φ ist ein *skalares* Potential, $\vec{\Psi}$ ein *Vektorpotential*. In unserem Fall, wo \vec{u} ein Verschiebungsfeld ist, bezeichnet man beide als Verschiebungspotentiale. (Man sollte sie nicht mit dem *elastischen* Potential, d.h. der elastischen Deformationsenergie, verwechseln.)

Φ heißt speziell *Kompressionspotential* und $\vec{\Psi}$ *Scherpotential*. Wenn der Vektor \vec{u} gegeben ist, kann man Φ und $\vec{\Psi}$ berechnen (vgl. Übung 2.6):

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{r^3} dV \\ \vec{\Psi} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{u} \times \vec{r}}{r^3} dV \end{aligned} \quad (2.27)$$

Der Vektor \vec{r} (mit dem Betrag r) zeigt vom Volumenelement dV zum Aufpunkt, an dem Φ und $\vec{\Psi}$ berechnet werden sollen. Die Interpretation geht über den ganzen Raum. Für $\vec{\Psi}$ gilt noch zusätzlich:

$$\text{div}\vec{\Psi} = 0 \quad (2.28)$$

$\vec{\Psi}$ muss in kartesischen Koordinaten berechnet werden.

Der Anteil $\text{grad}\Phi$ in 2.26 heißt *Kompressionsanteil* von \vec{u} . Er ist rotations- und wirbelfrei. Nach S.9 erfahren die Volumenelemente keine starre Rotation, sondern nur eine Deformation, die im allgemeinen sowohl eine Volumenänderung als auch eine Scherung umfasst (im Sinne von Übung 2.2 auf S.14). Im Hauptachsensystem des Deformationstensors tritt nur Volumenänderung auf (Kompression oder Dehnung). Der Anteil $\text{rot}\vec{\Psi}$ in 2.26 heißt *Scheranteil*. Er ist divergenz- oder quellfrei; die Volumenelemente erfahren keine Volumenänderung, wohl aber Scherungen und starre Rotationen.

Die Volumenkraft \vec{f} in der Bewegungsgleichung 2.24 kann man ebenfalls nach 2.26 aufspalten:

$$\vec{f} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{\psi} \quad (2.29)$$

(Unterscheidung von $\vec{\Psi}$ und $\vec{\psi}$!)

Setzt man 2.26 und 2.29 in 2.24 ein, so erhält man:

$$\rho \left[\text{grad} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \text{rot} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} \right] = (\lambda + 2\mu) \text{grad} \nabla^2 \Phi - \mu \text{rot} \text{rot} \text{rot} \vec{\Psi} + \text{grad} \varphi + \text{rot} \vec{\psi} \quad (2.30)$$

Wir versuchen nun, die Gradiententerme *für sich* gleichzusetzen und ebenso die Rotationsterme. Wenn sich die so gewonnenen Differentialgleichungen lösen lassen, ist 2.30 und damit auch 2.24 erfüllt. Man erhält:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi - \varphi \right] &= 0 \\ \text{rot} \left[\rho \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} + \mu \text{rot} \text{rot} \vec{\Psi} - \vec{\psi} \right] &= 0 \end{aligned}$$

In noch weiterer Vereinfachung lassen wir die eckigen Klammern verschwinden:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\varphi}{\lambda + 2\mu} & \alpha^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ -\text{rot} \text{rot} \vec{\Psi} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} &= -\frac{\vec{\psi}}{\mu} & \beta^2 &= \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (2.31)$$

φ und $\vec{\psi}$ sind aus \vec{f} nach 2.27 zu berechnen. Wenn keine Volumenkräfte wirken, ist $\varphi = 0$ und $\vec{\psi} = 0$. Die Gleichung für Φ ist eine inhomogene Wellengleichung. In kartesischen Koordinaten ergeben sich für die Komponenten von $\vec{\Psi}$ wegen 2.23 und 2.28 ebenfalls inhomogene Wellengleichungen. In anderen Koordinaten sehen die Gleichungen für die Komponenten von $\vec{\Psi}$ etwas anders aus (vgl. Übung 2.10).

Die beiden benutzten Vereinfachungen sind, wie die Erfahrung gezeigt hat, legitim. Man kann also entweder 2.24 oder 2.31 lösen. In komplizierteren Fällen kommt man nur über 2.31 durch. Hierbei sind die Randbedingungen für Verschiebungen und Spannungen in solche für Φ und $\vec{\Psi}$ zu überführen.

Wellentypen

Die allgemeine Diskussion der Differentialgleichungen 2.31 zeigt, dass sie Lösungen haben, die *Wellen* entsprechen (Näheres in Abschnitt 3.1). Störungen im Kompressionsanteil des Verschiebungsvektors laufen als *Kompressionswelle* mit der Geschwindigkeit $\alpha = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}$ durch das Medium. Störungen im Scheranteil breiten sich als *Scherwelle* mit der Geschwindigkeit $\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$ aus. Wir haben so die beiden grundsätzlich verschiedenen elastischen Wellentypen gefunden, die durch ein festes Medium laufen können. Für Gesteine gilt häufig mit brauchbarer Näherung $\lambda = \mu$. In diesem Fall ist $\alpha/\beta = 3^{1/2}$. In flüssigen oder gasförmigen Medien gibt es wegen $\mu = 0$ nur Kompressionswellen (*Schallwellen*).

Häufig werden Kompressionswellen als *Longitudinalwellen* und Scherwellen als *Transversalwellen* bezeichnet. Der Verschiebungsvektor in einer Longitudinalwelle ist parallel zur Ausbreitungsrichtung, in einer Transversalwelle senkrecht dazu. Eine Kompressionswelle ist aber im allgemeinen nur bevorzugt longitudinal und eine Scherwelle nur bevorzugt transversal polarisiert. Die Gleichsetzungen sind also nicht völlig korrekt. Es gibt sogar Sonderfälle, in denen eine Kompressionswelle transversal und eine Scherwelle longitudinal ist (s. Abschnitt 3.5 und Übung 3.5.1 auf S.40).

Die seismologischen Bezeichnungen sind *P-Wellen* für Kompressionswellen und *S-Wellen* für Scherwellen. Sie drücken aus, dass die P-Welle der am frühesten an einer Station eintreffende Wellentyp von einem Erdbeben ist (P von primär), während die S-Welle später ankommt (S von sekundär).

In einem homogenen Medium sind Kompressionswellen und Scherwellen *entkoppelt*, d.h. sie breiten sich unabhängig voneinander aus. Das ist nicht mehr richtig für ein inhomogenes Medium, in dem α, μ , und/oder ρ und damit auch α und β von Ort zu Ort variieren. Auch in diesem Fall laufen im allgemeinen zwei Wellengruppen durch ein ausgedehntes Medium, und die Laufzeiten ihrer ersten Einsätze werden durch die Geschwindigkeitsverteilungen α bzw. β bestimmt. Die schnellere der beiden Wellen ist aber keine reine Kompressionswelle mehr, sondern erhält auch noch einen Scheranteil; die langsamere ist entsprechend keine reine Scherwelle, sondern erhält auch noch einen Kompressionsanteil. Dies ist plausibel, wenn man ein inhomogenes Medium durch stückweise homogene Medien approximiert. Um die Randbedingungen an den Trennflächen zwischen den einzelnen homogenen Bereichen zu befriedigen, braucht man normalerweise (wie wir im Abschnitt 3.6.2. im einzelnen sehen werden) auf beiden Seiten Kompressions- und Scherwellen. Die im Innern einer homogenen Partie des Mediums entkoppelt laufenden Kompressions- und Scherwellen erzeugen also an den Trennflächen reflektierte und gebrochene Wellen auch vom jeweils anderen Typ. Diese Typumwandlung findet im kontinuierlich inhomogenen Medium kontinuierlich statt und ist umso ausgeprägter, je größer die *Änderung von α, β , und/oder ρ pro Wellenlänge* ist. Die Theorie für kontinuierlich inhomogene Medien ist viel komplizierter als die für gebietsweise homogene Medien. Medien, bei denen α, β und ρ nur von *einer* Koordinate abhängen, etwa von der Tiefe, kann man für viele seismologische Zwecke durch Pakete aus homogenen Schichten approximieren, und für diese gibt es heute effektive Methoden für den Gebrauch auf Digitalrechnern.

Übung 2.9:

Man beweise 2.27, indem man 2.26 mit der Gleichung

$$\nabla^2 \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}$$

vergleicht und beachtet, dass die Poissonsche Gleichung $\nabla^2 \vec{a} = \vec{u}$ die Lösung $\vec{a} = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{u} \frac{1}{r} dV$ hat.

Übung 2.10:

Man schreibe 2.26 in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) unter den Voraussetzungen, dass Zylindersymmetrie herrscht und die φ -Komponente von \vec{u} verschwindet ($\Psi_r = \Psi_z = 0$). Wie lautet in diesem Fall 2.31 für verschwindende Volumenkräfte?

Übung 2.11:

Man zeige, dass in einer Flüssigkeit mit konstanter Dichte ρ , aber variablem Kompressionsmodul k der Druck p die Wellengleichung $\nabla^2 p = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ mit ortsabhängiger Schallgeschwindigkeit $\alpha = (k/\rho)^{1/2}$ erfüllt. Hinweise: Man leite aus der Bewegungsgleichung 2.12 ohne Volumenkräfte die Gleichung $\rho \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = -\text{grad } p$ ab und wende hierauf die Divergenzoperation an ($p = -k \text{ div } \vec{u}$).

Kapitel 3

Raumwellen

3.1 Ebene Raumwellen

Die einfachsten Typen von Wellen erhält man, wenn man für ein unbegrenztes Medium (Vollraum) Lösungen der Bewegungsgleichung sucht, die nur von *einer* Ortskoordinate abhängen. Zum Beispiel suchen wir Lösungen von 2.21 oder 2.24 in der Form $\vec{u} = (u_x(x, t), 0, 0)$, d.h., \vec{u} zeigt in x -Richtung und hängt nur von x und der Zeit t ab, oder in der Form $\vec{u} = (0, u_y(x, t), 0)$, d.h., \vec{u} zeigt in y -Richtung und hängt ebenfalls nur von x und t ab. Im ersten Fall folgt aus 2.21 für $f_i = 0$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},$$

im zweiten Fall

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Das sind *eindimensionale Wellengleichungen*. Im folgenden betrachten wir die allgemeine Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichung ist

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad (3.2)$$

wo $F(x)$ und $G(x)$ beliebige, zweimal differenzierbare Funktionen sind (man überzeuge sich davon, dass (3.2) (3.1) löst). Eine andere Form ist

$$u(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (3.3)$$

Der jeweilige erste bzw. zweite Term in (3.2) und (3.3) ist zu interpretieren als eine in positive bzw. negative x -Richtung laufende Welle. Zum Beispiel ist der erste Term in (3.3) für $x = x_1$

$$u(x_1, t) = F\left(t - \frac{x_1}{c}\right) = F_1(t).$$

Für eine andere Entfernung $x_2 > x_1$ ist

$$u(x_2, t) = F\left(t - \frac{x_2}{c}\right) = F\left(t - \frac{x_2 - x_1}{c} - \frac{x_1}{c}\right) = F_1\left(t - \frac{x_2 - x_1}{c}\right).$$

Das heißt: zu den Zeitpunkten t spielt sich in der Entfernung x_2 dasselbe ab wie in der Entfernung x_1 zu den früheren Zeiten $t - (x_2 - x_1)/c$. Das entspricht der Vorstellung einer Welle, die von

x_1 nach x_2 in der Zeit $(x_2 - x_1)/c$ gelaufen ist. Ihre *Ausbreitungsgeschwindigkeit* ergibt sich hieraus zu c . Die *Wellenfronten* dieser Welle, d.h. die Flächen zwischen gestörtem und ungestörtem Gebiet, sind die Ebenen $x = \text{const}$. Daher handelt es sich um eine *ebene* Welle. Wenn $G(x)$ in (3.2) oder $G(t)$ in (3.3) nicht verschwindet, so hat man zwei ebene Wellen, die in entgegengesetzte Richtungen laufen.

Ist $u = u_x$, so handelt es sich um eine Longitudinalwelle (Polarisation *in* Ausbreitungsrichtung), im Falle von $u = u_y$ um eine Transversalwelle (Polarisation *senkrecht* zur Ausbreitungsrichtung).

Harmonische Wellen können durch

$$u(x, t) = A \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = A \exp [i(\omega t - kx)]$$

dargestellt werden mit: A =Amplitude (reell oder komplex), ω =Kreisfrequenz, $\nu = \omega/2\pi$ =Frequenz, $T = 1/\nu$ =Periode, $k = \omega/c$ =Wellenzahl, $\Lambda = 2\pi/k$ =Wellenlänge. Zwischen c , Λ und ν besteht die bekannte Beziehung: $c = \Lambda\nu$. Die Verwendung der komplexwertigen Exponentialfunktion zur Beschreibung ebener harmonischer Wellen ist erheblich günstiger als die Verwendung reelwertiger Sinus- oder Kosinusfunktionen. Letztere sind aber anschaulicher. Wir werden später durchweg mit der Exponentialfunktion arbeiten.

3.2 Das Anfangswertproblem für ebene Wellen

Wir suchen die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung (3.1), die die Anfangsbedingungen:

$$u(x, 0) = f(x) \text{ fuer die Verschiebung und}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \text{ fuer die Partikelgeschwindigkeit}$$

erfüllt. Diese Aufgabe entspricht ganz der Anfangswertaufgabe einer linearen *gewöhnlichen* Differentialgleichung, etwa dem Problem, die Bewegung eines Pendels zu bestimmen, wenn Anfangsausschlag und -geschwindigkeit gegeben sind. Wir gehen von (3.2) aus. Für $t=0$ ist also:

$$F(x) + G(x) = f(x) \tag{3.4}$$

$$-cF'(x) + cG'(x) = g(x) \tag{3.5}$$

Integriert man (3.5) nach x , so folgt:

$$F(x) - G(x) = -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^x g(\xi) d\xi \tag{3.6}$$

Aus der Addition von (3.4) und (3.6) folgt

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\{ f(x) - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^x g(\xi) d\xi \right\},$$

und aus der Subtraktion

$$G(x) = \frac{1}{2} \left\{ f(x) + \frac{1}{c} \int_{-\infty}^x g(\xi) d\xi \right\}.$$

Damit wird

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ f(x - ct) + f(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi.$$

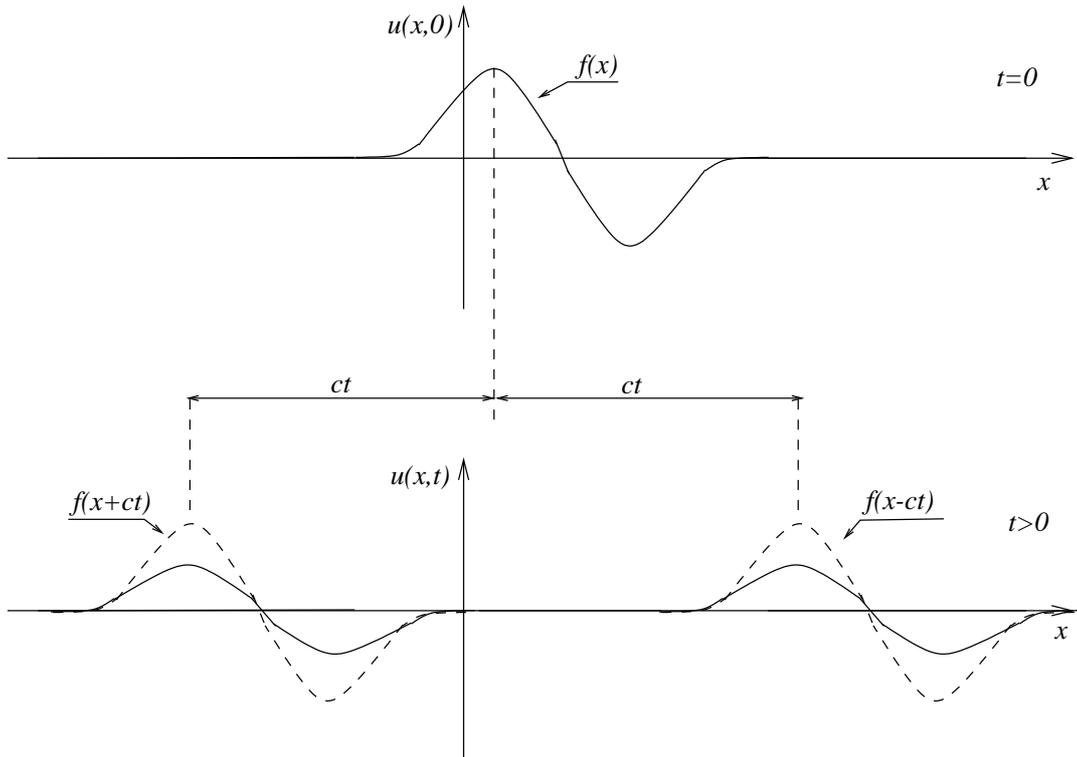
Diese Lösung befriedigt tatsächlich die Wellengleichung und die Anfangsbedingungen (man überzeuge sich davon). Wir diskutieren *zwei Sonderfälle*:

Fall 1

$g(x) = 0$, d.h die Anfangsgeschwindigkeit verschwindet. Dann ist:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x - ct) + f(x + ct)\}$$

Zwei Momentbilder, für $t=0$ und für $t>0$, veranschaulichen dieses Resultat:



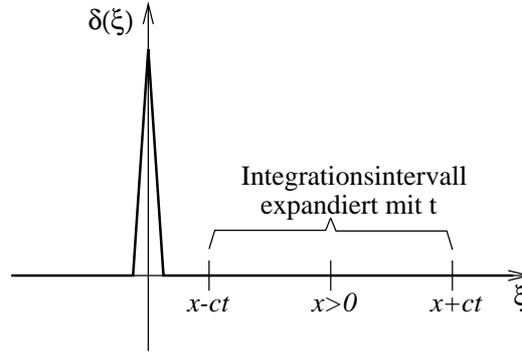
Zwei ebene Wellen laufen vom Erregungsort nach beiden Seiten mit der Geschwindigkeit c . Praktisches Beispiel: langes gespanntes Seil mit der Form $f(x)$ für $t=0$.

Fall 2

$f(x) = 0$, d.h. die Anfangsverschiebung verschwindet. Weiterhin sei $g(x) = \bar{V}_0 \delta(x)$. $\delta(x)$ ist die Diracsche Deltafunktion (s. Anhang A, Abschnitt A.3.). $q(x)$ entspricht in etwa einem "Schlag" bei $x = 0$. \bar{V}_0 hat die Dimension Geschwindigkeit mal Länge. Dann ist

$$u(x, t) = \frac{\bar{V}_0}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \delta(\xi) d\xi.$$

Die Skizze zeigt den Verlauf des Integranden und das Integrationsintervall für einen festen Zeitpunkt $t > 0$ und für $x > 0$:



Erst wenn das Integrationsintervall den Punkt $\xi = 0$ einschließt, ist das Integral nicht mehr Null. Es hat dann immer den Wert 1:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\bar{V}_0}{2c} H\left(t - \frac{x}{c}\right) & \text{für } x > 0 \\ \frac{\bar{V}_0}{2c} H\left(t + \frac{x}{c}\right) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$H(t)$ ist die *Heavisidesche Sprungfunktion* (oder kurz der Einheitsprung): $H(t) = 0$ für $t < 0$, $H(t) = 1$ für $t \geq 0$.

Die Verschiebung springt bei $t = |x|/c$ von Null auf den Wert $V_0/2c$.

3.3 Einfache Randwertprobleme für ebene Raumwellen

Die einfachste Randwertaufgabe besteht darin, zu einem zeitabhängigen Druck $P(t)$ auf der Oberfläche $x = 0$ eines homogenen Halbraums die Verschiebung im Halbraum zu suchen. Da die Verschiebung \vec{u} ersichtlich nur eine x -Komponente u_x hat und x die einzige Raumkoordinate ist, die explizit auftaucht, gilt die eindimensionale Wellengleichung (3.1) für eine ebene Kompressionswelle:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

Ihre Lösung ist im vorliegenden Fall

$$u_x(x, t) = F\left(t - \frac{x}{\alpha}\right),$$

da sich nur eine Welle in $+x$ -Richtung ausbreiten kann. Die Funktion $F(t)$ ist aus der Randbedingung zu bestimmen, dass der Spannungsvektor bei der Annäherung an die freie Oberfläche $x = 0$ stetig in den von außen aufgeprägten Spannungsvektor übergeht (vgl. (2.25) und S.24):

$$p_{xx} = -P(t) \text{ und } p_{xy} = p_{xz} = 0 \text{ fuer } x = 0.$$

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (2.17) ergeben erstens, dass p_{xy} und p_{xz} automatisch überall verschwinden, und weiterhin

$$p_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\alpha} F'\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) = -\rho\alpha F'\left(t - \frac{x}{\alpha}\right).$$

Hieraus folgt für $x = 0$

$$-\rho\alpha F'(t) = -P(t)$$

und damit durch Integration

$$F(t) = \frac{1}{\rho\alpha} \int_{-\infty}^t P(\tau) d\tau = \frac{1}{\rho\alpha} \int_0^t P(\tau) d\tau.$$

Dabei haben wir die Annahme gemacht, dass $P(t) = 0$ für $t < 0$ ist. Damit lautet die Verschiebung:

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho\alpha} \int_0^{t-x/\alpha} P(\tau) d\tau$$

Sie ist proportional zum zeitlichen Integral des Drucks auf die Oberfläche des Halbraums. Wenn ein kurzzeitiger Impuls wirkt, $P(t) = \overline{P}_0 \delta(t)$, so ist

$$u_x(x, t) = \frac{\overline{P}_0}{\rho\alpha} H\left(t - \frac{x}{\alpha}\right).$$

\overline{P}_0 hat die Dimension Druck mal Zeit (s. Anhang A, Abschnitt A.3.1). Zum Zeitpunkt $t = x/\alpha$ verschieben sich die Punkte des Halbraums sprunghaft um $\overline{P}_0/\rho\alpha$ in $+x$ -Richtung und bleiben in dieser Lage fixiert. Für $\overline{P}_0 = 1 \text{ atsec} = 9.81 \text{ Nsec/cm}^2 \approx 10^6 \text{ dyn sec/cm}^2$, $\rho = 3 \text{ g/cm}^3$ und $\alpha = 6 \text{ km/sec} = 6 \times 10^5 \text{ cm/sec}$ erhält man eine Verschiebung von etwa 0.5cm.

Das vorliegende Randwertproblem ist so einfach, dass man direkt von der Bewegungsgleichung (2.21) oder (2.24) ausgehen konnte. Man kann natürlich auch mit den Verschiebungspotentialen Φ und $\overline{\Psi}$ und ihren Differentialgleichungen (2.31) arbeiten (wie?).

Übung 3.1:

Auf die Oberfläche des Halbraums wirke die Tangentialspannung $T(t)$. Wie lautet die Verschiebung im Halbraum? Anwendung: Die Tangentialspannung auf Erdbeben-Bruchflächen hat die Größenordnung $50 \text{ bar} = 50 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ (Spannungsabfall). Welche Partikelgeschwindigkeit (auf der Bruchfläche) erhält man hierfür ($\rho = 3 \text{ g/cm}^3$, $\beta = 3.5 \text{ km/sec}$)?

Übung 3.2:

Auf einem völlig starren Untergrund liege eine elastische Schicht der Dicke H . Auf ihre Oberfläche wirke der Druck $P(t)$. Wie sieht der Bewegungsablauf in der Schicht aus? Man untersuche speziell den Fall $P(t) = \overline{P}_0 \delta(t)$.

Übung 3.3:

Man löse das zu Übung 3.2 gehörige statische Problem (konstanter Druck P_1 auf der Oberfläche).

3.4 Kugelwellen von Explosions-Punktquellen

In den letzten Abschnitten haben wir unendlich ausgedehnte ebene Wellen betrachtet. Sie sind insofern Idealisierungen, als man sie nicht wirklich erzeugen kann, da man hierzu unendlich ausgedehnte Quellen brauchte. Die einfachsten Wellentypen von Quellen mit endlicher Ausdehnung sind *Kugelwellen*, d.h. Wellen, die sich von einem punktförmigen Erregungszentrum (*Punktquelle*) in einen Vollraum hinein ausbreiten. Ihre Wellenfronten sind Kugeln.

Im einfachsten Fall ist der Verschiebungsvektor bezüglich der Punktquelle erstens *radial* gerichtet zweitens *radialsymmetrisch*, d.h. auf einer Kugel um die Punktquelle ist die Radialverschiebung überall dieselbe. Wenn man eine kugelförmige Sprengstoffladung in einem homogen Medium fernab von Grenzflächen zündet, hat die Verschiebung diese beiden Eigenschaften. Wir nennen diese Punktquelle daher *Explosions-Punktquelle*. Unsere mit der linearen Elastizitätstheorie berechnete Resultate lassen sich aber auf Kugelwellen von Sprengladungen nur in dem Entfernungsbereich anwenden, in dem die Voraussetzungen der Theorie (infinitesimale Deformation, lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehungen) erfüllt sind. In der *plastischen Zone*, der *Zerrüttungszone* und der *nichtlinearen Zone* (das ist eine sehr grobe Einteilung mit wachsendem Abstand vom Ort der Ladung) ist das nicht der Fall.

Wir wollen folgendes Randwertproblem lösen: Gegeben sei die Radialverschiebung in der Entfernung $r = r_1$ von der Punktquelle: $U(r_1, t) = U_1(t)$. Gesucht ist $U(r, t)$ für $r > r_1$.

Zur Lösung können wir einmal von der Bewegungsgleichung (2.24) mit $\vec{f} = 0$ ausgehen. Auf diese Weise ist das Problem im Anhang A (Abschnitt A.2.2) unter Verwendung der Laplacetransformation gelöst. Hier wollen wir, was viel einfacher ist, die Verschiebungspotentiale aus Abschnitt 2.6 benutzen. Das Scherpotential verschwindet, da sich ein radialsymmetrischer, radialer Vektor allein aus dem Kompressionspotential

$$\Phi(r, t) = \int^r U(r', t) dr'$$

ableiten lässt. In Kugelkoordinaten (r, ϑ, λ) ist

$$\text{grad } \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) = (U(r, t), 0, 0).$$

Für Φ gilt nach (2.31) die Wellengleichung mit $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Im Falle von Radialsymmetrie reduziert sich also die Wellengleichung auf die Form der eindimensionalen Wellengleichung für kartesische Koordinaten,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

nun aber für die Funktion $r\Phi$. Die allgemeinste Lösung von (3.7) ist daher

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} \left\{ F\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + G\left(t + \frac{r}{\alpha}\right) \right\}$$

und stellt die Superposition einer von der Punktquelle weglaufernden und einer in die Punktquelle hineinlaufenden Kompressionswelle dar. Bei praktischen Problemen verschwindet der zweite Anteil immer:

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \quad (3.8)$$

Die Funktion $F(t)$ wird oft als *Anregungsfunktion* oder reduziertes Verschiebungspotential bezeichnet. Die Wellenfronten sind die Kugeln $r = \text{const}$. Das Potential als Funktion der Zeit hat überall dieselbe Form, die Amplituden nehmen mit $1/r$ ab. Die Radialverschiebung der Kugelwelle besteht aus zwei Anteilen mit unterschiedlicher r -Abhängigkeit:

$$U(r, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} F\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{r\alpha} F'\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \quad (3.9)$$

Sie *ändern damit ihre Form* mit wachsender Entfernung. Dies gilt allgemein für die Verschiebung in Wellen von Punktquellen. Der erste Term in (3.9) heißt *Nahfeldterm*, weil er für hinreichend kleine r dominiert. Der zweite Term ist der *Fernfeldterm* und beschreibt die Verschiebung mit guter Genauigkeit für Entfernungen von der Punktquelle, die größer als einige Wellenlängen sind (man weise dies für $F(t) = e^{i\omega t}$ nach). Dort nehmen die Verschiebungen also mit $1/r$ ab.

Aus der Randbedingung für $r = r_1$ folgt:

$$-\frac{1}{r_1 \alpha} F'\left(t - \frac{r_1}{\alpha}\right) - \frac{1}{r_1^2} F\left(t - \frac{r_1}{\alpha}\right) = U_1(t)$$

Jetzt legen wir den Zeitnullpunkt so, dass $U_1(t)$ erst für $t = r_1/\alpha$ beginnt, von Null verschieden zu sein. Es sieht also so aus, als würde die Welle zur Zeit $t = 0$ in der Punktquelle ($r = 0$) starten.

Definiert man $\bar{U}_1(t - \frac{r_1}{\alpha}) = U_1(t)$, so gilt: $\bar{U}_1(t)$ ist bereits für $t > 0$ nicht identisch Null. Setzt man dann $\tau = t - \frac{r_1}{\alpha}$, so wird

$$\frac{1}{r_1\alpha}F'(\tau) + \frac{1}{r_1^2}F(\tau) = -\bar{U}_1(\tau). \quad (3.10)$$

Lösung von (3.10) mit der Laplacetransformation, speziell mit Abschnitt A.2.1 des Anhangs A:

Da das Kriterium (A.16) des Anhangs für alle physikalisch realisierbaren Verschiebungen $\bar{U}_1(\tau)$ erfüllt ist, verschwindet der Anfangswert $F(+0)$ von $F(\tau)$. Man erhält also durch Transformation von (3.10) mit $F(\tau) \circ \bullet f(s)$ und $\bar{U}_1(\tau) \circ \bullet \bar{u}_1(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} \left(\frac{s}{\alpha} + \frac{1}{r_1} \right) f(s) &= -\bar{u}_1(s) \\ f(s) &= -r_1\alpha \frac{1}{s + \frac{\alpha}{r_1}} \bar{u}_1(s) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mit $\left(s + \frac{\alpha}{r_1}\right)^{-1} \bullet \circ e^{-\frac{\alpha}{r_1}\tau}$ (s. Anhang A, Abschnitt A.1.4) und unter Benutzung des Faltungssatzes (s. Anhang A, Formel (A.7)) erhält man die Rücktransformation von (3.11):

$$F(\tau) = -r_1\alpha \int_0^\tau \bar{U}_1(\vartheta) e^{-\frac{\alpha}{r_1}(\tau-\vartheta)} d\vartheta$$

Hieraus folgt

$$F'(\tau) = -r_1\alpha \bar{U}_1(\tau) + \alpha^2 \int_0^\tau \bar{U}_1(\vartheta) e^{-\frac{\alpha}{r_1}(\tau-\vartheta)} d\vartheta.$$

Die Radialverschiebung für $r > r_1$ ergibt sich dann aus (3.9) zu

$$U(r, t) = \frac{r_1}{r} \left\{ \bar{U}_1(\tau) + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \int_0^\tau \bar{U}_1(\vartheta) e^{-\frac{\alpha}{r_1}(\tau-\vartheta)} d\vartheta \right\} \quad (3.12)$$

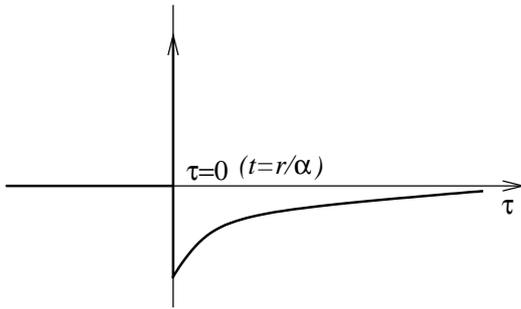
mit der *retardierten Zeit* $\tau = t - \frac{r}{\alpha}$. Damit ist der Randwertproblem gelöst.

Anwendungen

a) $U_1(t) = \bar{U}_0 \delta(t - \frac{r_1}{\alpha})$, d.h. $\bar{U}_1(t) = \bar{U}_0 \delta(t)$

Dimension von \bar{U}_0 ist Länge mal Zeit. (3.12) gilt auch in diesem Fall (s. Anhang A, S.136):

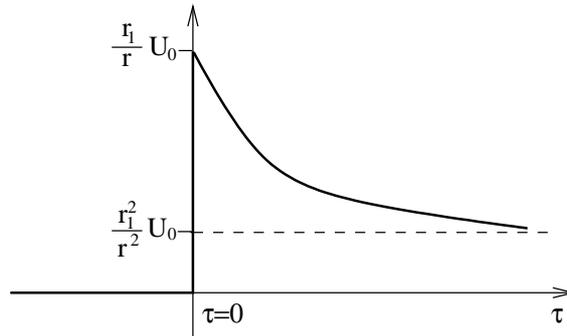
$$U(r, t) = \frac{r_1}{r} \bar{U}_0 \left\{ \delta(\tau) + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) e^{-\frac{\alpha}{r_1}\tau} H(\tau) \right\}$$



b) $U_1(t) = U_0 H(t - \frac{r_1}{\alpha})$, d.h. $\bar{U}_1(t) = U_0 H(t)$

Dimension von U_0 ist Länge. Aus (3.12) folgt:

$$\begin{aligned} U(r, t) &= \frac{r_1}{r} U_0 \left\{ H(\tau) + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) e^{-\frac{\alpha}{r_1}\tau} \left[\frac{r_1}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{r_1}\vartheta} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\tau} H(\tau) \right\} \\ &= \frac{r_1}{r} U_0 H(\tau) \left\{ 1 + \left(\frac{r_1}{r} - 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{r_1}\tau} \right) \right\} \\ &= \frac{r_1}{r} U_0 H(\tau) \left\{ \frac{r_1}{r} + \left(1 - \frac{r_1}{r} \right) e^{-\frac{\alpha}{r_1}\tau} \right\} \end{aligned}$$



Die (dynamische) Anfangsverschiebung nimmt mit $1/r$ ab, die (statische) Endverschiebung mit $1/r^2$.

Übung 3.4:

In einem kugelförmigen Hohlraum mit Radius r_1 wirke der Druck $P(t)$ ($P(t) = 0$ für $t < \frac{r_1}{\alpha}$). Wie lautet die Differentialgleichung für die Anregungsfunktion $F(t)$ (analog zu 3.10)? Die Radialspannung p_{rr} ist mit der Radialverschiebung U im Fall von Radialsymmetrie wie folgt verknüpft (Nachweis?):

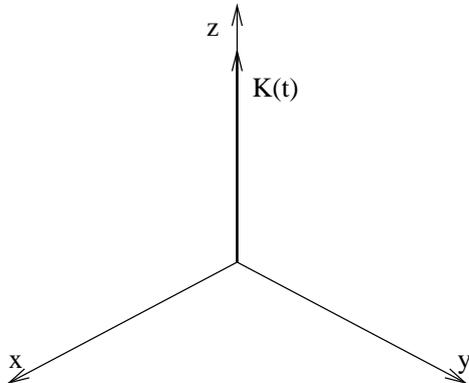
$$p_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + 2\lambda \frac{U}{r}$$

Welche Frequenzen werden bevorzugt abgestrahlt (Eigenschwingungen des Hohlraums)? Dies kann man aus der Differentialgleichung ablesen, ohne sie zu lösen (vgl. mit der Differentialgleichung des mechanischen Schwingers auf S.132 im Anhang A). Man löse die Differentialgleichung für $P(t) = \bar{P}_0 \delta(t - r_1/\alpha)$.

3.5 Kugelwellen von Einzelkraft- und Dipol-Punktquellen

3.5.1 Einzelkraft-Punktquelle

Eine in einem kartesischen Koordinatensystem in z -Richtung wirkende Einzelkraft, die im Ursprung angreift und das Kraft-Zeit-Gesetz $K(t)$ besitzt, hat die Kraftdichte (vgl. Anhang A, Abschnitt A.3.3):



$$\vec{f} = (0, 0, \delta(x) \delta(y) \delta(z) K(t))$$

Die Zerlegung $\vec{f} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}$ ist möglich mit Hilfe der Formeln (2.27):

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^3} (z - \zeta) \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(\zeta) K(t) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{K(t)z}{4\pi r^3}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\vec{\psi}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^3} \{-(y - \eta), x - \xi, 0\} \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(\zeta) K(t) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{K(t)}{4\pi r^3} (-y, x, 0)\end{aligned}\quad (3.14)$$

Setzt man (3.13) und (3.14) in die Differentialgleichung (2.31) der Verschiebungspotentiale ein, so sieht man, dass beim Scherpotential $\vec{\Psi} = (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)$ $\Psi_z = 0$ ist und für Ψ_x und Ψ_y wegen (2.23) und (2.28) Wellengleichungen gelten, ebenso wie für das Kompressionspotential Φ :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{K(t)z}{4\pi \rho \alpha^2 r^3} \\ \nabla^2 \Psi_x - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} &= \frac{K(t)y}{4\pi \rho \beta^2 r^3} \\ \nabla^2 \Psi_y - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} &= -\frac{K(t)x}{4\pi \rho \beta^2 r^3}\end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\nabla^2 a - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = f(x, y, z, t)$$

lautet bei verschwindenden Anfangswerten

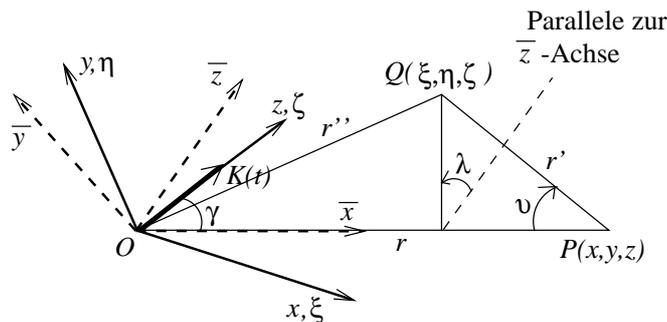
$$a(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r'} f\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r'}{c}\right) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.15)$$

mit

$$r'^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Formel (3.15) ist die *Kirchhoffsche Formel* für ein unendlich ausgedehntes Medium. Sie ist das Analogon zur bekannteren Lösung der Poissonschen Differentialgleichung, die ebenfalls ein Raumintegral über die Störfunktion ist (vgl. Übung 2.6 auf 26). (3.15) kann natürlich auch im anderen als kartesischen Koordinaten berechnet werden; davon machen wir sogleich Gebrauch.

Anwendung auf die Wellengleichung für Φ : Wir führen für die Integration Kugelkoordinaten (r', ζ, λ) , bezogen auf den Aufpunkt P , ein. λ wird, wie in der nachstehenden Skizze veranschaulicht ist, durch ein kartesisches Hilfskoordinatensystem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ definiert,



dessen \bar{x} -Achse identisch mit der Verbindungslinie OP ist. Die \bar{z} -Achse soll in der Ebene liegen, die durch die z, ζ -Achse und die Linie OP aufgespannt wird. Dann hat z, ζ -Achse im $\bar{x} - \bar{y} - \bar{z}$ -System die Richtung des Einheitsvektors

$$\vec{n} = (\cos \gamma, 0, \sin \gamma) = \left\{ \frac{z}{r}, 0, \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Der Vektor \vec{r}'' von O nach Q lautet im selben System

$$\vec{r}'' = (r - r' \cos \vartheta, r' \sin \vartheta \sin \lambda, r' \sin \vartheta \cos \lambda).$$

Diese beiden Vektoren brauchen wir nachher. Formel (3.15) lautet für Φ :

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{16\pi^2 \rho \alpha^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\zeta}{r''^3} \cdot \frac{K\left(t - \frac{r'}{\alpha}\right)}{r'} \cdot r'^2 \sin \vartheta \, d\lambda \, d\vartheta \, dr'$$

Wir müssen noch ζ und r'' durch r', ϑ und λ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \xi &= \vec{r}'' \cdot \vec{n} = \frac{z}{r}(r - r' \cos \vartheta) + \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} r' \sin \vartheta \cos \lambda \\ r''^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta \quad (\text{Kosinussatz}) \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{16\pi^2 \rho \alpha^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{z \left(1 - \frac{r'}{r} \cos \vartheta\right) + r' \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \vartheta \cos \lambda}{r^3 \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos \vartheta\right)^{\frac{3}{2}}} K\left(t - \frac{r'}{\alpha}\right) \cdot r' \sin \vartheta \, d\lambda \, d\vartheta \, dr'$$

Bei der Integration über λ ergibt der Teil des Integranden mit dem Faktor $\cos \lambda$ keinen Beitrag. Der andere Teil ist einfach mit 2π zu multiplizieren. Mit $a = r/r'$ und

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{(1 - a \cos \vartheta) \sin \vartheta}{(1 + a^2 - 2a \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} d\vartheta &= \int_{(1-a)^2}^{(1+a)^2} \frac{1 + \frac{1}{2}(u - 1 - a^2)}{2au^{\frac{3}{2}}} du \\ &= \frac{1}{4a} \int_{(1-a)^2}^{(1+a)^2} \left(\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 - a^2}{u^{\frac{3}{2}}} \right) du \\ &= \frac{1}{4a} \left\{ 2u^{\frac{1}{2}} + 2(a^2 - 1)u^{-\frac{1}{2}} \right\}_{(1-a)^2}^{(1+a)^2} \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ 1 + a - |1 - a| + (a + 1)(a - 1) \left(\frac{1}{1 + a} - \frac{1}{1 - a} \right) \right\} \\ &= \begin{cases} 2 & \text{für } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{für } a > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Mit :

$$\begin{aligned} u &= 1 + a^2 - 2a \cos \vartheta \\ du &= 2a \sin \vartheta d\vartheta (1 - a)^2 \end{aligned}$$

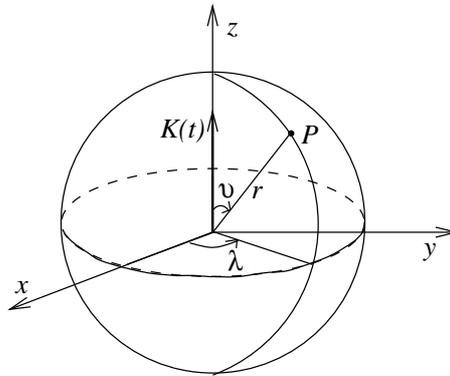
erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \frac{z}{4\pi \rho \alpha^2 r^3} \int_0^r r' K\left(t - \frac{r'}{\alpha}\right) dr' \\ &= \frac{z}{4\pi \rho r^3} \int_0^{\frac{r}{\alpha}} K(t - \tau) \tau d\tau \end{aligned}$$

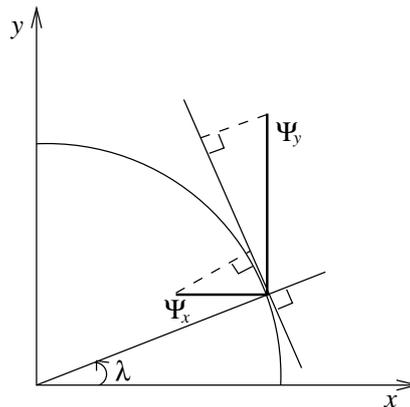
Genauso werden die Wellengleichungen für Ψ_x und Ψ_y gelöst. Insgesamt erhalten wir die *Potentiale der Einzelkraft-Punktquelle*:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \frac{z}{4\pi\rho r^3} \int_0^{\frac{x}{\beta}} K(t - \tau)\tau d\tau \\ \Psi_x(x, y, z, t) &= -\frac{y}{4\pi\rho r^3} \int_0^{\frac{x}{\beta}} K(t - \tau)\tau d\tau \\ \Psi_y(x, y, z, t) &= \frac{x}{4\pi\rho r^3} \int_0^{\frac{x}{\beta}} K(t - \tau)\tau d\tau \\ \Psi_z(x, y, z, t) &= 0 \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Bevor wir die Verschiebungen ableiten, gehen wir zu Kugelkoordinaten (r, ϑ, λ) , nun bezogen auf die Einzelkraft-Punktquelle, über:



In Kugelkoordinaten hat das Scherpotential keine r - und keine ϑ -Komponente (Nachweis?), und für seine λ -Komponente gilt $\Psi_\lambda = -\Psi_x \sin \lambda + \Psi_y \cos \lambda$.



Damit erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r, \vartheta, t) &= \frac{\cos \vartheta}{4\pi\rho r^2} \int_0^{\frac{x}{\alpha}} K(t - \tau)\tau d\tau \\ \Psi_\lambda(r, \vartheta, t) &= \frac{\sin \vartheta}{4\pi\rho r^2} \int_0^{\frac{x}{\beta}} K(t - \tau)\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

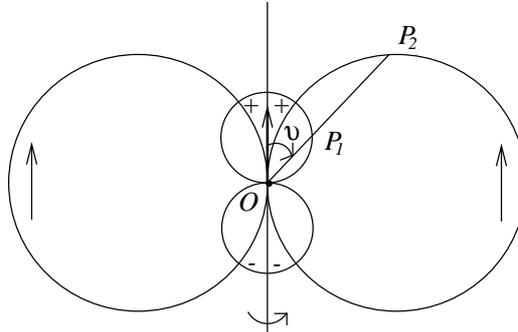
Es existiert keine Abhängigkeit von λ . Der *Verschiebungsvektor* $\vec{u} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\vec{\Psi}$ hat in Kugelkoordinaten die Komponenten (Nachweis?):

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\sin\vartheta \Psi_\lambda) \\ u_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi_\lambda) \\ u_\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Wir sehen hier allgemein, dass die aus Φ folgende *P*-Welle nicht rein longitudinal ist, sondern noch einen transversalen Anteil (in u_ϑ) enthält. Ebenso ist die aus Ψ_λ folgende *S*-Welle nicht rein transversal, da in u_r auch ein Scheranteil enthalten ist. Das erste Glied in u_ϑ und das zweite in u_r sind aber Nahfeldterme (vgl. Übung 3.5.1). Wir berechnen hier nur die *Fernfeldterme* von u_r und u_ϑ (nur Differentiation der Integrale in (3.17)):

$$\left. \begin{aligned} u_r &\simeq \frac{\cos\vartheta}{4\pi\rho\alpha^2 r} K\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) && \text{(longitudinale } P\text{-Welle)} \\ u_\vartheta &\simeq \frac{-\sin\vartheta}{4\pi\rho\beta^2 r} K\left(t - \frac{r}{\beta}\right) && \text{(transversale } S\text{-Welle)} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Die Fernfeldverschiebungen haben also die Form des Kraft-Zeit-Gesetzes $K(t)$ und nehmen mit $1/r$ ab. Die Einzelkraft-Punktquelle strahlt richtungsabhängig, und die *Fernfeld-Abstrahlcharakteristiken* sehen wie folgt aus:



Die Abstrahlcharakteristiken sind jeweils 2 Kreise. Die für die Abstrahlung von *S*-Wellen haben einen um den Faktor α^2/β^2 größeren Radius als die für die Abstrahlung von *P*-Wellen. Variiert man für festes r den *Abstrahlwinkel* ϑ , so sind die Verschiebungen u_r proportional zur Strecke $\overline{OP_1}$ und die Verschiebungen u_ϑ proportional zur Strecke $\overline{OP_2}$. Das Vorzeichen der Verschiebung u_r ändert sich beim Übergang vom ersten *P*-Abstrahlkreis zum zweiten. Die räumliche Abstrahlcharakteristik folgt aus der ebenen durch Rotation um die Krafttrichtung.

In Rahmen der Fernfeldformeln (3.19) wird in Richtung der Kraft keine *S*-Welle abgestrahlt und senkrecht zu ihr keine *P*-Welle (vgl. aber Übung 3.5.1).

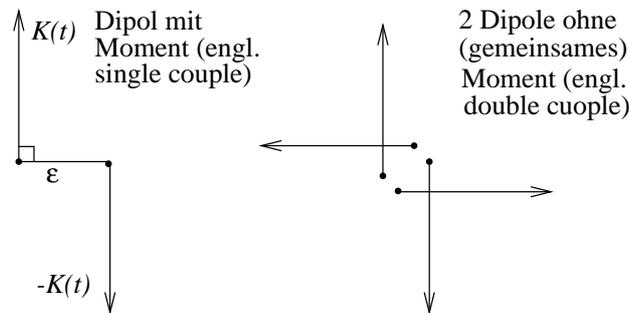
Die praktische Bedeutung der Einzelkraft-Punktquelle besteht u.a. darin, dass sie, bei senkrechter Einwirkung auf eine freie Oberfläche, ein gutes Modell für die Wirkung eines Fallgewichts, die Anregung beim *Vibrois-Verfahren* und oft auch für *oberflächennah gezündete Explosionen* ist. Um einen ganz korrekten Vergleich zu ermöglichen, müsste das theoretische Problem unter Einbeziehung der freien Oberfläche gelöst werden. Das ist aber erheblich schwieriger. Außerdem sind die Unterschiede zu unserem Vollraum-Modell für *P*-Wellen durchweg und für *S*-Wellen bei Abstrahlwinkeln kleiner als etwa 30 bis 40 Grad gering.

Übung 3.5:

Man berechne die vollständigen Verschiebungen (3.18) aus (3.17) und untersuche speziell die Richtungen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 90^\circ$. Welche Polarisierungen hat der Verschiebungsvektor dort und zu welchen Zeiten sind Einsätze zu erwarten? Man berechne für $K(t) = K_0 H(t)$ die statischen Verschiebungen ($t > r/\beta$).

3.5.2 Dipol-Punktquellen

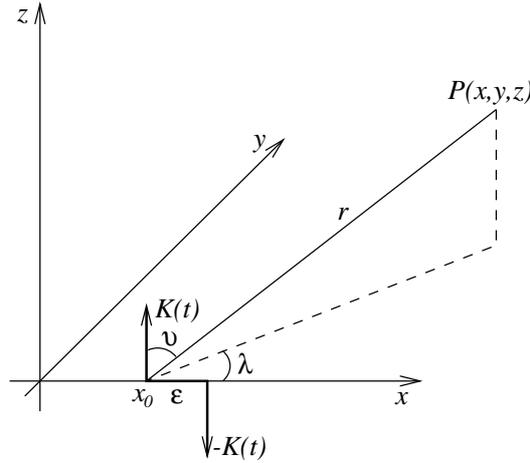
Aus zwei entgegengesetzten Einzelkräften, die an eng benachbarten Punkten angreifen, kann man einen Kraftdipol aufbauen. Die Skizze zeigt links einen *Dipol mit Moment*, bei dem die Verbindungslinie der Kräfte senkrecht auf der Kraftrichtung steht; beim *Dipol ohne Moment* zeigt die Verbindungslinie in Kraftrichtung.



Zwei Dipole mit Moment, deren Gesamtmoment aber verschwindet (rechts in der Skizze), sind ein gutes Modell für viele Erdbebenherde, d.h. die räumliche Abstrahlung von Erdbebenwellen mit hinreichend großen Wellenlängen ist sehr ähnlich wie beim Double-couple-Modell. Die tatsächlich in einem Erdbebenherd ablaufenden Vorgänge sind natürlich nicht auf vier Einzelkräfte zurückzuführen: Normalerweise bricht das Gestein entlang einer Fläche, wenn die Scherfestigkeit durch Akkumulation von Scherspannungen überschritten wird (*Scherbruch*), oder aber es entstehen Bewegungen auf einer bereits bestehenden Bruchfläche, wenn die Scherspannungen die Haftreibung übersteigen. Herdmodelle aus Einzelkräften und Dipolen sind nur *äquivalente Punktquellen*.

In Folgenden leiten wir die Fernfeldverschiebungen des Single-couple-Modells ab und geben die Resultate für das Double-couple-Modell an. Wir gehen von dem Single-couple der Skizze aus (mit $x_0 \neq 0$) und berechnen zunächst aus (3.19) die *P*-Wellen-Verschiebung der Kraft $K(t)$ mit *kartesischen* Komponenten ($\cos \vartheta = z/r$, $r^2 = (x - x_0)^2 + y^2 + z^2$):

$$\left. \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{matrix} \right\} = \frac{z}{4\pi\rho\alpha^2 r^2} K\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \cdot \left\{ \begin{matrix} (x - x_0)/r \\ y/r \\ z/r \end{matrix} \right.$$



Die Verschiebungen u'_x, u'_y, u'_z der Kraft $-K(t)$ mit dem um ϵ verschobenen Angriffspunkt erhält man durch Entwicklung von u_x, u_y, u_z in eine Taylorreihe um die Herdcoordinate x_0 , mit Abbruch nach dem linearen Glied. Zum Beispiel wird:

$$u'_x = - \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x_0} \epsilon \right)$$

Die Single-couple-Verschiebung folgt dann durch Superposition:

$$u''_x = u_x + u'_x = - \frac{\partial u_x}{\partial x_0} \epsilon$$

Um die Fernfeldverschiebung zu erhalten, braucht man nur nach dem r in der Kraft $K(t - r/\alpha)$ zu differenzieren und nachzudifferenzieren: $\partial r / \partial x_0 = -(x - x_0)/r$. Die anderen Terme mit x_0 tragen nur Nahfeldterme bei, deren Amplitude stärker als mit $1/r$ abnimmt. Man erhält:

$$u''_x = - \frac{z}{4\pi\rho\alpha^2 r^2} K' \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \frac{-1}{\alpha} \frac{-(x - x_0)}{r} \epsilon \frac{x - x_0}{r}$$

Genauso behandelt man die y - und die z -Verschiebung. Insgesamt ergibt sich:

$$\left. \begin{array}{l} u''_x \\ u''_y \\ u''_z \end{array} \right\} = - \frac{z(x-x_0)}{4\pi\rho\alpha^3 r^3} K' \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \epsilon \cdot \left\{ \begin{array}{l} (x - x_0)/r \\ y/r \\ z/r \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Auch die P -Wellen-Verschiebung des Single-couple ist, wie erwartet, longitudinal.

Der Kraftdipol ist streng definiert durch den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$, verbunden mit gleichzeitigem Anwachsen von $K(t)$ derart, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K(t) \epsilon = M(t)$$

endlich (ungleich Null) bleibt. $M(t)$ heißt *Momentenfunktion* des Dipols und hat die Dimension eines Drehmoments.

Aus (3.20) folgt mit $z/r = \cos \vartheta$ und $(x - x_0)/r = \sin \vartheta \cos \lambda$ die P -Wellen-Verschiebung des Single-couple in r -Richtung:

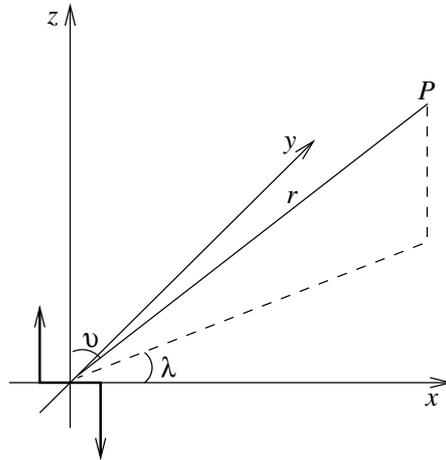
$$u_r = - \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta \cos \lambda}{4\pi\rho\alpha^3 r} M' \left(t - \frac{r}{\alpha} \right)$$

Zum Schluss darf nun auch $x_0 = 0$ angenommen werden. Für die S -Welle erhält man auf dieselbe Weise:

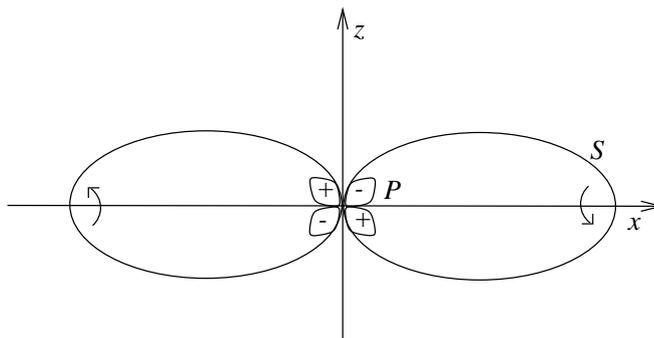
$$u_\vartheta = - \frac{\sin \vartheta \sin \vartheta \cos \lambda}{4\pi\rho\beta^3 r} M' \left(t - \frac{r}{\beta} \right)$$

Die Azimutalkomponente verschwindet wie bei der Einzelkraft.

Nachstehend sind die Ergebnisse für den Single-couple nochmals zusammengestellt, und es ist die Abstrahlung in der x - z -Ebene ($y=0$) skizziert:

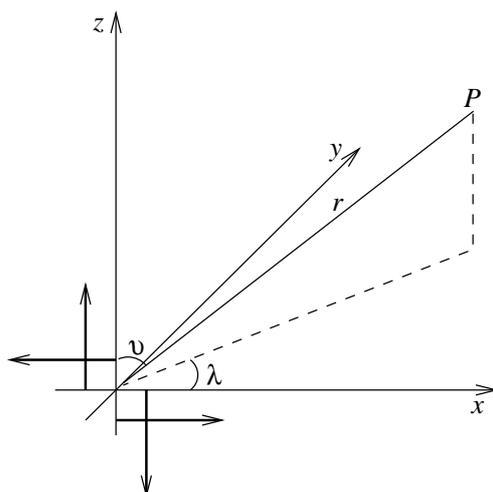


$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{\sin 2\vartheta \cos \lambda}{8\pi\rho\alpha^3 r} M' \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ u_\vartheta &= \frac{\sin^2 \vartheta \cos \lambda}{4\pi\rho\beta^3 r} M' \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \\ u_\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$



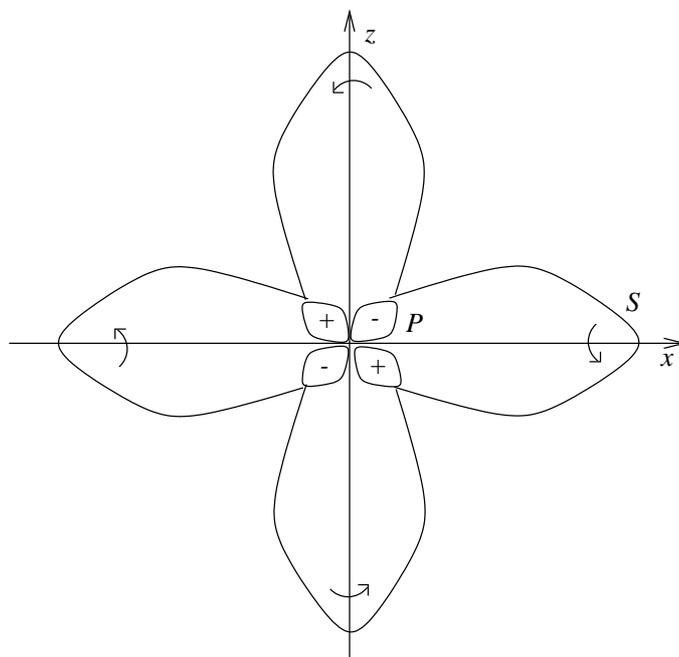
Das Verhältnis der maximalen S -Abstrahlung (für $\vartheta = 90^\circ$) und der maximalen P -Abstrahlung (für $\vartheta = 45^\circ$) beträgt etwa 10, wenn $\alpha \approx \beta\sqrt{3}$ ist. Die Abstrahlcharakteristiken in anderen Ebenen als $y = 0$ ergeben sich aus den skizzierten durch Multiplikation mit $\cos \lambda$. Die Ebene $x = 0$ ist eine *Knotenebene* sowohl für P - als auch S -Abstrahlung, die Ebene $z = 0$ ist eine nur für P .

Die Fernfeldverschiebung für einen in der x - z -Ebene liegenden Double-couple lauten:



$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{\sin 2\vartheta \cos \lambda}{4\pi\rho\alpha^3 r} M' \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ u_\vartheta &= -\frac{\cos 2\vartheta \cos \lambda}{4\pi\rho\beta^3 r} M' \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \\ u_\lambda &= \frac{\cos \vartheta \sin \lambda}{4\pi\rho\beta^3 r} M' \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Die Momentenfunktion in (3.22) ist die *eines* der beiden Dipole des Double-couple. Die Abstrahlcharakteristiken in der x - z -Ebene sehen wie folgt aus:

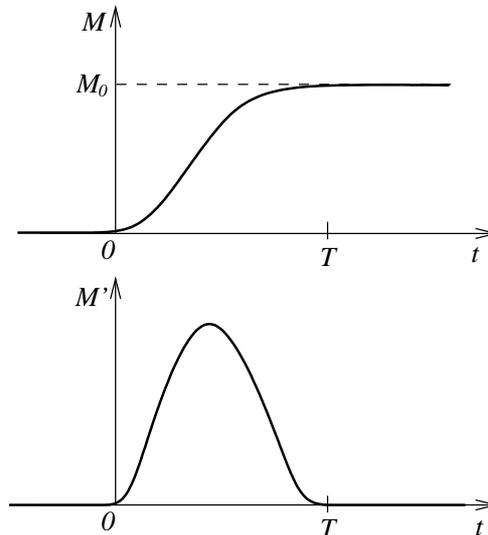


Die P -Abstrahlung des Double-couple hat dieselbe Form wie die des Single-couple, sie ist aber doppelt so stark; das Verhältnis der maximalen Abstrahlungen von S und P beträgt nun ca. 5 (für

$\lambda \approx \beta\sqrt{3}$). P -Knotenebenen sind die Ebenen $x=0$ und $z=0$. Die S -Welle hat keine Knotenebenen, sondern nur Knotenrichtungen (welche?).

Ein (infinitesimaler) *Scherbruch*, entweder in der Ebene $z=0$ mit Relativverschiebung in x -Richtung oder in der Ebene $x=0$ mit Relativverschiebung in z -Richtung, strahlt Wellen genauso ab wie ein *Double-couple*; es gibt also (3.22). Ein Scherbruch oder Erdbeben strahlt daher in Richtung seiner Bruchfläche und in die Ebene senkrecht dazu keine P -Wellen ab. Wenn man aus der *Vorzeichenverteilung* der P -Wellen eines Erdbebens die beiden Knotenebenen bestimmen kann, hat man die beiden möglichen Bruchflächen gefunden. Die Bestimmung der P -Knotenebenen von Erdbeben (*Herdlösung*, engl. *fault-plane solution*) ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von Herdvorgängen und auch der großräumigen Tektonik einer Herdregion. Häufig kann man mit geologischen Argumenten noch eine Wahl zwischen den beiden Möglichkeiten für die Bruchfläche treffen.

Die Momentenfunktion eines Erdbebens mit glattem Bruch ist mit guter Näherung eine Sprungfunktion mit von Null verschiedener Anstiegszeit T und einem Endwert M_0 , dem *Moment* des Bebens (s. Skizze). Die Fernfeldverschiebungen sind dann nach (3.22) einsinnige Impulse.



Ausbreitungseffekte in geschichteten Medien, z.B. in der Erdkruste, können die Impulsform noch verändern, insbesondere führen aber komplizierte Bruchvorgänge zu ganz anderen Verschiebungen als hier skizziert.

Übung 3.6

Man leite die *Double-couple*-Verschiebung u_r in (3.22) aus der entsprechenden *Single-couple*-Verschiebung in (3.21) ab. Man verwende dazu die Zerlegung (3.20) in kartesischen Komponenten.

3.6 Reflexion und Brechung ebener Wellen an der ebenen Trennflächen

3.6.1 Ebene Wellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung

In der Abschnitten 3.1 bis 3.3 hatten wir ebene Wellen betrachtet, die sich in Richtung einer Koordinatenachse ausbreiteten. Im folgenden brauchen wir ebene Wellen mit beliebiger Ausbre-

itungsrichtung. Sie lassen sich durch die folgenden Potentiale beschreiben:

$$\Phi = A \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{\alpha} \right) \right] \quad (3.23)$$

$$\vec{\Psi} = B \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{\beta} \right) \right] \vec{n} \quad (3.24)$$

Die zeitliche Variation ist also harmonisch. Diese Annahme reicht für viele Schlussfolgerungen aus. A und B sind Konstanten, \vec{k} und \vec{n} konstante Einheitsvektoren, und \vec{x} ist der Ortsvektor. ω ist die Kreisfrequenz und i die imaginäre Einheit. Φ und die Komponenten von $\vec{\Psi}$ befriedigen Wellengleichungen (bitte nachrechnen):

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Psi_j = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial t^2} \quad (\text{kartesische Koordinaten})$$

Da nach (3.23) und (3.24) an allen Beobachtungen zu allen Zeiten Bewegung herrscht, kann man Wellenfronten nicht als Trennfläche zwischen gestörtem und ungestörtem Gebiet definieren. Wir sehen als Wellenfronten die *Flächen konstanter Phase* $\omega(t - \vec{x} \cdot \vec{k}/c)$ mit $c = \alpha$ oder $c = \beta$ an. Diese Flächen sind also definiert durch

$$\frac{d}{dt} \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{c} \right) = 0.$$

Sie stehen senkrecht auf dem Vektor \vec{k} , der also die *Ausbreitungsrichtung* angibt, und verschieben sich parallel zu sich mit der *Phasengeschwindigkeit* c . Der Vektor \vec{k} , multipliziert mit der Wellenzahl ω/α bzw. ω/β , heißt *Wellenzahlvektor*.

Die *Polarisationsrichtung* des Kompressionsanteils

$$\text{grad } \Phi = -\frac{i\omega}{\alpha} A \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{\alpha} \right) \right] \vec{k} \quad (3.25)$$

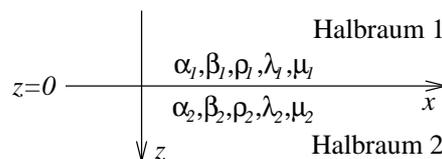
ist longitudinal (parallel zu \vec{k}), die des Scheranteils

$$\text{rot } \vec{\Psi} = -\frac{i\omega}{\beta} B \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{\beta} \right) \right] \vec{k} \times \vec{n} \quad (3.26)$$

($\text{rot}(f \cdot \vec{n}) = f \cdot \text{rot } \vec{n} - \vec{n} \times \text{grad } f$) ist transversal (senkrecht zu \vec{k}). Aus (3.26) ersieht man, dass man bei $\vec{\Psi}$, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, noch die Nebenbedingungen der Orthogonalität von \vec{k} und \vec{n} einführen kann (Zerlegung von \vec{n} in Komponenten parallel und senkrecht zu \vec{k}).

3.6.2 Grundgleichungen

Wir betrachten eine Kombination von zwei Halbräumen, die durch eine Ebene getrennt sind. Die Kombination ist beliebig (fest-fest, fest-Vakuum, flüssig-flüssig, ...). Wir arbeiten mit kartesischen Koordinaten wie in der Skizze angegeben.



Die y -Achse zeigt aus dem Blatt heraus. Der Verschiebungsvektor sei

$$\vec{u} = (u, v, w),$$

und seine Komponenten seien *unabhängig von y* , d.h. wir behandeln ein *ebenes Problem*, bei dem in allen Ebenen parallel zur x - z -Ebene dieselben Verhältnisse herrschen. Die einfachste Art und Weise, elastische Wellen unter dieser Voraussetzung zu untersuchen, besteht darin, u und w aus Potentialen abzuleiten, v dagegen nicht. Schreibt man nämlich

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}$$

komponentenweise,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}, \end{aligned}$$

so sieht man, dass man für v *zwei* Potentiale Ψ_1 und Ψ_3 braucht, die überdies in u und w nicht vorkommen. Bei v arbeitet man daher viel besser direkt mit der Bewegungsgleichung (2.21) ohne Volumenkräfte, die in diesem Fall zu einer Wellengleichung wird:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Unsere *Grundgleichungen* lauten also, wenn wir Ψ statt Ψ_2 schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \Psi &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 v &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die *Randbedingungen* in der Trennfläche $z=0$ zwischen den Halbräumen fordern Stetigkeit der Spannungskomponenten :

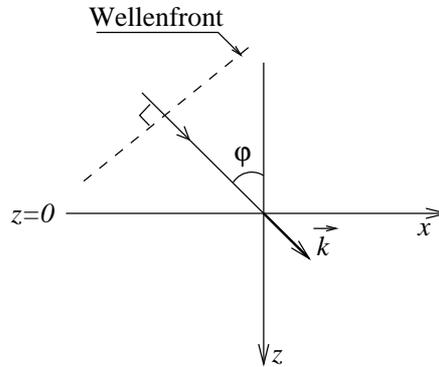
$$\begin{aligned} p_{zz} &= \lambda \text{div } \vec{u} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ p_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ p_{zy} &= \mu \frac{\partial v}{\partial z} : \\ \left. \begin{aligned} p_{zz} &= \frac{\lambda}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right) \\ p_{zx} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \\ p_{zy} &= \mu \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Welche der Verschiebungskomponenten stetig ist, hängt von der speziellen Halbraumkombination ab.

Da auch über die Randbedingungen keine Verknüpfung von v mit Φ und Ψ und damit mit u und w erfolgt, stellen wir fest, dass sich S -Wellen, deren Verschiebung *nur* horizontal ist (in y -Richtung: SH -Wellen), unabhängig ausbreiten von den aus Φ folgenden P -Wellen und den aus Ψ folgenden S -Wellen, deren Verschiebung *auch* eine Vertikalkomponente hat (in z -Richtung: SV -Wellen). Insbesondere treten an Trennflächen beim Einfallen einer SH -Welle nur reflektierte und gebrochene SH -Wellen auf, nicht aber P - oder SV -Wellen. Wenn andererseits eine P - (SV -) Welle auf eine Trennfläche einfällt, so entstehen zwar reflektierte und gebrochene SV - (P -) Wellen, aber keine SH -Wellen. Diese Aussagen gelten so allgemein nur für den Fall einer Trennfläche zwischen zwei festen Halbräumen. In Flüssigkeiten breiten sich weder SH - noch SV -Wellen aus, im Vakuum und in einen starren Halbraum gibt es überhaupt keine Wellen. Entsprechend vereinfachen sich die Verhältnisse, wenn solche Halbräume beteiligt sind.

Die *Entkopplung* von P - SV - und SH -Wellen gilt bei ebenen Problemen nicht nur im einfachen Fall einer Trennfläche $z=\text{const}$ zwischen 2 homogenen Halbräumen, sondern auch im komplizierten Fall eines inhomogenen Mediums, solange dessen Dichte, Wellengeschwindigkeiten und Moduln nur Funktionen von x und z sind. Eine Folge der Entkopplung ist, dass wir im folgenden die Reflexion und Brechung für P - bzw. SV -Wellen und für SH -Wellen ganz getrennt behandeln können. Weiterhin zerlegen wir eine beliebig polarisierte S -Welle vor der Reflexion in ihren SV - und SH -Anteil und untersuchen die Reflexion für beide Anteile getrennt.

In jedem Fall machen wir für die einfallende ebene Welle die Annahme, dass ihr Potential Φ oder $\vec{\Psi}$ die Form (3.23) oder (3.24) hat (im zweiten Fall hat $\vec{\Psi}$ nur die y -Komponente Ψ), bzw. im Falle einer SH -Welle, dass v durch ein Gesetz der Form (3.23) mit β statt α beschrieben wird. Der Einfallswinkel φ geht in den Richtungsvektor \vec{k} ein:



$$\vec{k} = (\sin \varphi, 0, \cos \varphi) \quad (3.30)$$

Für die reflektierten Wellen werden entsprechende Ansätze gemacht mit *anderen* Amplituden A bzw. B und *anderen* Richtungsvektoren \vec{k} . Die Beziehung zwischen diesen neuen Richtungsvektoren und (3.30) geht, wie sich zeigen wird, über das Snelliussche Gesetz. Die Verhältnisse der Verschiebungsamplituden der reflektierten bzw. gebrochenen Wellen und der einfallenden Welle heißen *Reflexions-* bzw. *Brechungskoeffizienten* und hängen vom Einfallswinkel und von den Eigenschaften der Halbräume ab. R_{pp} , R_{ps} , B_{pp} , B_{ps} , R_{ss} , R_{sp} , B_{ss} , B_{sp} sollen die Koeffizienten für P - SV -Wellen sein, r_{ss} und b_{ss} diejenigen für SH -Wellen. Der erste Buchstabe der Indizierung bezeichnet den Typ der einfallenden, der zweite den reflektierten bzw. gebrochene Wellentyp.

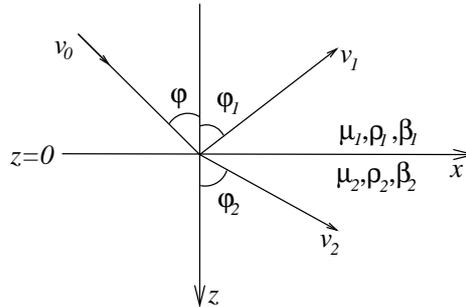
Wir diskutieren im folgenden nur relativ einfache Fälle, an denen man jedoch wesentliche Erscheinungen studieren kann.

3.6.3 Reflexion und Brechung von SH-Wellen

Reflexions- und Brechungskoeffizienten

Die Verschiebung v_0 in y -Richtung der einfallenden SH-Welle lautet:

$$v_0 = C_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{\beta_1} x - \frac{\cos \varphi}{\beta_1} z \right) \right] \quad (3.31)$$



Ansätze für die reflektierte und die gebrochene SH-Welle als ebene Wellen mit dem Reflexionswinkel φ_1 bzw. dem Brechungswinkel φ_2 und mit derselben Frequenz wie die einfallende Welle:

$$\text{Reflexion: } v_1 = C_1 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi_1}{\beta_1} x + \frac{\cos \varphi_1}{\beta_1} z \right) \right] \quad (3.32)$$

$$\text{Brechung: } v_2 = C_2 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi_2}{\beta_2} x - \frac{\cos \varphi_2}{\beta_2} z \right) \right] \quad (3.33)$$

Wir suchen die Winkel φ_1 und φ_2 und den Reflexionskoeffizienten $r_{ss} = C_1/C_0$ und den Brechungskoeffizienten $b_{ss} = C_2/C_0$.

Die Randbedingungen fordern für $z = 0$ Stetigkeit der Verschiebungen (das ist eine vernünftige Annahme) und der Normal- und Tangentialspannungen. Das ergibt:

$$\left. \begin{aligned} v_0 + v_1 &= v_2 \\ \mu_1 \frac{\partial}{\partial z} (v_0 + v_1) &= \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{ für } z = 0 \quad (3.34)$$

Die Spannungskomponenten p_{zz} und p_{zx} verschwinden überall, da keine P- und/oder SV-Wellen auftreten.

Man setzt (3.31), (3.32) und (3.33) in (3.34) ein und erhält aus der ersten Randbedingungen:

$$C_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{\beta_1} x \right) \right] + C_1 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi_1}{\beta_1} x \right) \right] = C_2 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi_2}{\beta_2} x \right) \right] \quad (3.35)$$

Wir wollten Lösungen v_1 und v_2 des Problems finden, deren Amplituden C_1 und C_2 ortsunabhängig sind, denn nur dann können wir sicher sein, dass v_1 und v_2 Lösungen der zugehörigen Wellengleichungen sind. C_1 und C_2 werden aber nur ortsunabhängig, wenn in (3.35)

$$\frac{\sin \varphi}{\beta_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\beta_1} = \frac{\sin \varphi_2}{\beta_2} \quad (3.36)$$

ist, denn nur dann kürzt sich der Exponentialfaktor heraus. (3.36) ist das bekannte Snelliussche Gesetz und besagt, dass der Reflexionswinkel φ_1 gleich dem Einfallswinkel φ ist und für den Brechungswinkel φ_2

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

gilt. Damit erhalten wir aus (3.35)

$$C_2 - C_1 = C_0. \quad (3.37)$$

Die zweite Randbedingung in (3.34) liefert:

$$\mu_1 i \omega \left(-\frac{\cos \varphi}{\beta_1} C_0 + \frac{\cos \varphi_1}{\beta_1} C_1 \right) = -\mu_2 i \omega \frac{\cos \varphi_2}{\beta_2} C_2$$

Mit $\varphi_1 = \varphi$ und $\mu_{1,2}/\beta_{1,2} = \rho_{1,2}\beta_{1,2}$ erhalten wir hieraus

$$\rho_1 \beta_1 \cos \varphi (C_1 - C_0) = -\rho_2 \beta_2 \cos \varphi_2 C_2$$

oder

$$\frac{\rho_2 \beta_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 \beta_1 \cos \varphi} C_2 + C_1 = C_0. \quad (3.38)$$

Aus (3.37) und (3.38) folgen schließlich Reflexions- und Brechungskoeffizient:

$$r_{ss} = \frac{C_1}{C_0} = \frac{\rho_1 \beta_1 \cos \varphi - \rho_2 \beta_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 \beta_1 \cos \varphi + \rho_2 \beta_2 \cos \varphi_2} \quad (3.39)$$

$$b_{ss} = \frac{C_2}{C_0} = \frac{2\rho_1 \beta_1 \cos \varphi}{\rho_1 \beta_1 \cos \varphi + \rho_2 \beta_2 \cos \varphi_2} \quad (3.40)$$

Aus (3.36) erhält man hierzu:

$$\cos \varphi_2 = (1 - \sin^2 \varphi_2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} \sin^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

Für *senkrechten* Einfall ($\varphi = 0$) gilt

$$r_{ss} = \frac{\rho_1 \beta_1 - \rho_2 \beta_2}{\rho_1 \beta_1 + \rho_2 \beta_2} \quad \text{und} \quad b_{ss} = \frac{2\rho_1 \beta_1}{\rho_1 \beta_1 + \rho_2 \beta_2}.$$

In diesem Fall hängen r_{ss} und b_{ss} nur von den *Impedanzen* $\rho_1 \beta_1$ und $\rho_2 \beta_2$ der beiden Halbräume ab. Bei *streifendem* Einfall ($\varphi = \pi/2$) ist $r_{ss} = -1$ und $b_{ss} = 0$. Die Amplitude der reflektierten Welle ist dem Betrag nach nie größer als die der einfallenden Welle, die der gebrochenen Welle kann größer sein, wenn $\rho_2 \beta_2 < \rho_1 \beta_1$ ist (z.B. für $\varphi = 0$).

Wenn r_{ss} negativ ist, so bedeutet dies, dass in einem Punkt der Trennfläche der Verschiebungsvektor der reflektierten Welle *dann* in $-y$ -Richtung zeigt, wenn der Verschiebungsvektor der einfallenden Welle in $+y$ -Richtung zeigt. Auf de Fall impulsartiger Anregung (siehe weiter unter) übertragen, bedeutet dies, dass die Richtungen des Erstausschlags der einfallenden und der reflektierten Welle entgegengesetzt sind.

Das folgende Bild (aus W. Schott: Die Reflektivitätsmethode für SH-Wellen in Theorie und Anwendung, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 1979) zeigt $|r_{ss}|$ als Funktionen von φ für verschiedene Geschwindigkeitsverhältnisse $\beta_1/\beta_2 > 1$ und $\rho_1 = \rho_2$:

not found!

Totalreflexion

Wenn $\beta_2 < \beta_1$ ist wie im obigen Bild, so ist $\cos \varphi_2$ für alle Einfallswinkel φ reell. Dasselbe gilt auch für r_{ss} und b_{ss} . *Totalreflexion*, also $|r_{ss}| = 1$, gilt es dann nur für streifenden Einfall.

Ist $\beta_2 > \beta_1$, so ist $\cos \varphi_2$ nur reell, solange

$$\varphi < \varphi^* = \arcsin \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

ist. φ^* heißt *kritischer Winkel* (oder *Grenzwinkel der Totalreflexion*). Nach (3.41) ist $\varphi = \varphi^*$ mit streifendem Verlauf der Normalenrichtung der Welle im zweiten Halbraum verbunden ($\varphi_2 = \pi/2$).

Wird $\varphi > \varphi^*$, so ist es $\cos \varphi_2$ imaginär, und zwar genauer negativ imaginär für positives ω und positiv imaginär für negatives ω , denn nur dann wächst v_2 für $z \rightarrow +\infty$ nicht überall Grenzen. r_{ss} und b_{ss} werden komplex. Selbstverständlich lösen v_1 und v_2 dann immer noch die Wellengleichungen und befriedigen die Randbedingungen, auch wenn wir beim Aufstellen der Ansätze (3.32) und (3.33) nicht von vornherein mit diesem Fall gerechnet haben. Der Reflexionskoeffizient lässt sich dann schreiben:

$$\left. \begin{aligned} r_{ss} &= \frac{a-ib}{a+ib} = \exp(-2i \arctan \frac{b}{a}) \\ a &= \rho_1 \beta_1 \cos \varphi \\ b &= -\rho_2 \beta_2 \left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} \sin^2 \varphi - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega}{|\omega|} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Er hat den Betrag 1 und eine vom Einfallswinkel abhängige Phase. *Ihr Vorzeichen ändert sich mit dem Vorzeichen der Frequenz.* Der Verlauf von $|r_{ss}|$ ist nachstehend für einige Fälle dargestellt (Bild aus Diplomarbeit W. Schott):

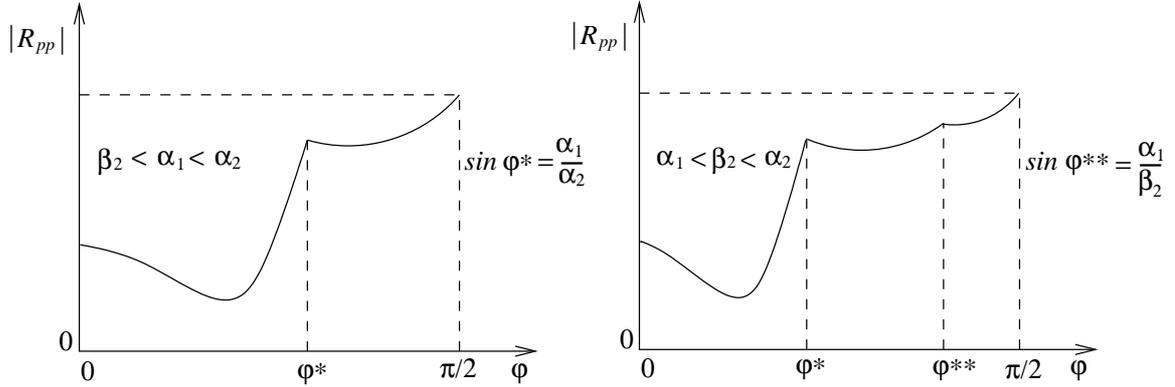


Die gebrochene Welle läuft für $\varphi > \varphi^*$ parallel zur Trennfläche mit der Geschwindigkeit $\beta_1 / \sin \varphi$. Ihre Amplitude wird nicht nur durch b_{ss} bestimmt, sondern auch durch den von z abhängigen Exponentialterm: sie nimmt mit wachsendem Abstand z von der Trennfläche exponentiell ab (*inhomogene* oder *quergedämpfte Welle*, *Grenzschichtwelle*). Es ergibt sich (bitte nachrechnen):

$$v_2 = b_{ss} C_0 \exp \left[-\frac{|\omega|}{\beta_2} \left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} \sin^2 \varphi - 1 \right)^{\frac{1}{2}} z \right] \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{\beta_1} x \right) \right]$$

Andere Fälle

Die Behandlung der Reflexion ebener *P*-Wellen an der Trennfläche zwischen zwei *Flüssigkeiten* führt zu ganz ähnlichen Resultaten wie im gerade diskutierten Fall (vgl. Übung 3.9). Liegt die Trennfläche zwischen zwei *festen Halbräumen*, so wird der Rechenaufwand erheblich größer, weil nun auch reflektierte und gebrochene Wellen vom *SV*-Typ mit einbezogen werden müssen; wir verzichten daher auf Einzelheiten. Der Betrag des Reflexionskoeffizienten R_{pp} sieht qualitativ wie in den beiden folgenden Skizzen aus:



Für $\varphi = 0$ ist: $R_{pp} = \frac{\rho_2 \alpha_2 - \rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2 + \rho_1 \alpha_1}$ (vgl. auch Übung 3.9).

Das $|R_{pp}|$ für $\varphi^* < \varphi < \pi/2$ kleiner als 1 ist, liegt erstens an der reflektierten *SV*-Welle, in der ebenfalls Energie transportiert wird. Zweitens läuft im links skizzierten Fall für *alle* φ und im rechts skizzierten Fall für $\varphi < \varphi^{**}$ eine *SV*-Welle in den zweiten Halbraum. Dieser zweite Energieverlust ist bei $\alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2$ jenseits des *zweiten kritischen Winkels*

$$\varphi^{**} = \arcsin \frac{\alpha_1}{\beta_2} > \varphi^* = \arcsin \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

nicht mehr möglich, und es gibt dort Totalreflexion. Die reflektierte Energie wird zu einem geringen Teil auch dann noch in der *SV*-Welle transportiert. Einige numerische Resultate für Reflexions- und Brechungskoeffizienten im *P-SV*-Fall sind nachstehend wiedergegeben (Modell der Kruste-Mantel-Grenze: $\alpha_1 = 6.5 \text{ km/sec}$, $\beta_1 = 3.6 \text{ km/sec}$, $\rho_1 = 2.8 \text{ g/cm}^3$, $\alpha_2 = 8.2 \text{ km/sec}$, $\beta_2 = 4.5 \text{ km/sec}$, $\rho_2 = 3.3 \text{ g/cm}^3$):

not found!

Übergang zur Impulsanregung

Der Übergang vom harmonisch eingeschwingenen Zustand, den wir bisher behandelt haben, zum Impulsfall kann mit Hilfe der *Fouriertransformation* bewerkstelligt werden (s. Anhang A, Abschnitt A.1.7). Wir lassen anstelle von (3.31) die *SH*-Welle

$$v_0 = F \left(t - \frac{\sin \varphi}{\beta_1} x - \frac{\cos \varphi}{\beta_1} z \right)$$

auf die Trennfläche einfallen und zerlegen $F(t)$ mit Hilfe des Fourierintegrals in *Partialschwingungen*:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\bar{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{Fouriertransformierte von } F(t)$$

Dann untersuchen wir wie oben Reflexion und Brechung der *Partialwellen*

$$dv_0 = \frac{1}{2\pi} \overline{F}(\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{\beta_1} x - \frac{\cos \varphi}{\beta_1} z \right) \right] d\omega$$

und superponieren anschließend z.B. die reflektierten Partialwellen zur reflektierten *SH*-Welle

$$v_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r_{ss} \overline{F}(\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{\beta_1} x + \frac{\cos \varphi}{\beta_1} z \right) \right] d\omega \quad (3.43)$$

Solange der Reflexionskoeffizient r_{ss} frequenzunabhängig ist (das ist der Fall für $\beta_2 < \beta_1$ oder für $\varphi < \varphi^*$ bei $\beta_2 > \beta_1$), kann man ihn vor das Integral ziehen und erhält

$$v_1 = r_{ss} F \left(t - \frac{\sin \varphi}{\beta_1} x + \frac{\cos \varphi}{\beta_1} z \right).$$

Der reflektierte Impuls hat in diesem Fall die Form des einfallenden. Das Amplitudenverhältnis der beiden Impulse ist gleich dem Reflexionskoeffizienten.

Für $\varphi > \varphi^*$ bei $\beta_2 > \beta_1$ ist r_{ss} jedoch nach (3.42) von ω abhängig, und man muss anders vorgehen. Wir zerlegen r_{ss} in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} r_{ss} &= R(\varphi) + iI(\varphi) \frac{\omega}{|\omega|} \\ R(\varphi) &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \\ I(\varphi) &= -\frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad (b \text{ für } \omega > 0) \end{aligned}$$

Dann gilt für die Reflexion nach (3.43)

$$v_1 = R(\varphi) F(\tau) + I(\varphi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\omega}{|\omega|} \overline{F}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.44)$$

mit der Abkürzung

$$\tau = t - \frac{\sin \varphi}{\beta_1} x + \frac{\cos \varphi}{\beta_1} z.$$

Die Funktion, mit der $I(\varphi)$ in (3.44) multipliziert ist, hat als Fouriertransformierte den Ausdruck $(i\omega/|\omega|) \cdot \overline{F}(\omega)$. Dies entspricht einem besonders einfachen *Filtervorgang* der Funktion $F(\tau)$ (vgl. die allgemeinen Bemerkungen über Filter in Abschnitt A.3.4 von Anhang A): jede in $F(\tau)$ vertretene Frequenz ω behält ihre Amplitude bei, aber ihre Phase wird verändert, und zwar um $+90^\circ$ für $\omega > 0$ und um -90° für $\omega < 0$. Im Anhang B.1 wird gezeigt, dass diese Filterung eine *Hilberttransformation* von $F(\tau)$ bedeutet. Die Funktion, mit der $I(\varphi)$ in (3.44) multipliziert ist, ist daher die *Hilberttransformierte* $F_H(\tau)$ von $F(\tau)$:

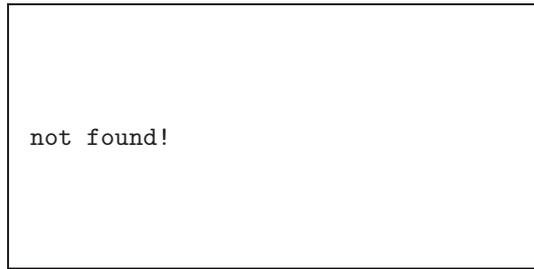
$$F_H(\tau) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{t - \tau} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |t| F'(\tau - t) dt \quad (3.45)$$

Das P bedeutet Hauptwertintegration (Aussparung der Singularität $t = \tau$), und die zweite Form von $F_H(\tau)$ folgt aus der ersten durch partielle Integration. Damit lautet die Reflexion

$$v_1 = R(\varphi) F(\tau) + I(\varphi) F_H(\tau). \quad (3.46)$$

Wegen des zweiten Terms in (3.46) ist die Form der Reflexion *anders* als die einfallenden Welle.

Das folgende Bild zeigt *numerische Resultaten* für die Reflexion von *SH*-Wellen und Einfallswinkel φ von 0 bis 90° :



Für unterkritische Einfallswinkel $\varphi < \varphi^* = 48^\circ$ hat die Reflexion die Form der einfallenden Welle und sowohl negatives als auch positives Vorzeichen. Jenseits des kritischen Winkels im Bereich der Totalreflexion treten Impulsverformungen auf, bis bei $\varphi = 90^\circ$ wieder die einfallende Welle erscheint, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen (entsprechend dem Reflexionskoeffizienten $r_{ss} = -1$). Die Phasenverschiebung von r_{ss} bei $\varphi = 55^\circ$ liegt am nächsten bei $\pm 90^\circ$ mit der Konsequenz $R(\varphi) \approx 0$. Der Reflexionsimpuls für diesen Einfallswinkel ist also annähernd die Hilberttransformierte $F_H(\tau)$ von $F(\tau)$ (die exakte Hilberttransformierte ist ein zu seinem Minimum symmetrischer Impuls).

Übung 3.7:

Welche Vorzeichen hat der Reflexionskoeffizient r_{ss} in den Bildern auf S.50 und S.51 dort, wo er reel ist?

Übung 3.8:

Man bestimme den Einfallswinkel, für den r_{ss} verschwindet (*Brewster-Winkel*), und gebe die Bedingungen an, unter denen dies tatsächlich eintritt (vgl. $\varphi \approx 40^\circ$ im Bild auf S.54).

Übung 3.9

Man berechne die Reflexions- und Brechungskoeffizienten für eine ebene Trennfläche zwischen zwei Flüssigkeiten, wenn eine ebene harmonische Longitudinalwelle unter dem Einfallswinkel φ einfällt. Man gebe qualitativ den Verlauf der Koeffizienten bei $\rho_1 = \rho_2$ für $\alpha_1 < \alpha_2$ und $\alpha_1 > \alpha_2$ an. Hinweis: Man benutze Ansätze für die Verschiebungspotentiale von der Form (3.31) bis (3.33) und drücke die Randbedingungen durch die Potentiale aus, wie in Abschnitt 3.6.2 erläutert.

3.6.4 Reflexion von P-Wellen an einer freien Oberfläche

Reflexionskoeffizienten

Die Untersuchung der Reflexion von P -Wellen an einer freien Oberfläche ist von praktischer Bedeutung für die Seismologie. Die P -Wellen von Erdbeben und Explosionen laufen durch die Erde und treffen von unten an der Registrierstation ein. Die Horizontal- und die Vertikalverschiebung dort sind andere als bei Abwesenheit der freien Oberfläche. Weiterhin tauchen die in die Erde zurück reflektierten P - und SV -Wellen in anderen Entfernungen vom Herd auf und zwar oft mit starken Amplituden. Es ist daher von Nutzen, wenn man die Reflexionskoeffizienten der Erdoberfläche kennt. Freilich vernachlässigt unser Modell die Schichtung der Erdkruste und ist daher nur eine erste Näherung an die Wirklichkeit.

Auf Grund der Bemerkung am Ende von Abschnitt 3.6.2 machen wir folgende Ansätze für die Potentiale:

Einfallende P – Welle :

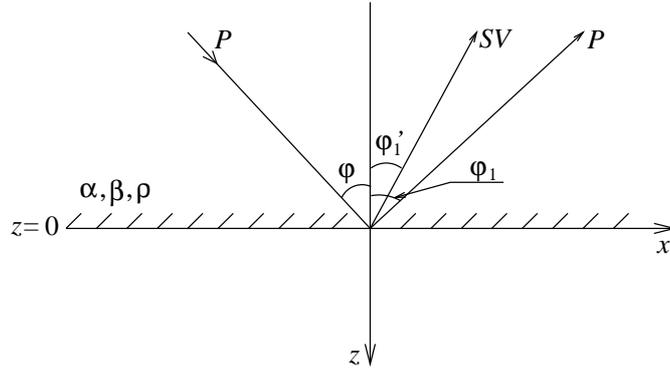
$$\Phi_0 = A_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x - \frac{\cos \varphi}{\alpha} z \right) \right] \quad (3.47)$$

Reflektierte P – Welle :

$$\Phi_1 = A_1 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi_1}{\alpha} x - \frac{\cos \varphi_1}{\alpha} z \right) \right] \quad (3.48)$$

Reflektierte SV – Welle :

$$\Psi_1 = B_1 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi'_1}{\beta} x + \frac{\cos \varphi'_1}{\beta} z \right) \right] \quad (3.49)$$



Die Randbedingungen fordern für $z = 0$ verschwindende Normal- und Tangentialspannungen: $p_{zz} = p_{zx} = 0$. Für die Verschiebungen gibt es keine Randbedingungen. Mit (3.29) erhalten wir ($\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, $\Psi = \Psi_1 = y$ – Komponente von $\vec{\Psi}$):

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi_0 + \Phi_1) + \frac{2\mu}{\lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Phi_0 + \Phi_1) + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial z} \right] = 0 \quad z = 0 \quad (3.50)$$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\Phi_0 + \Phi_1) + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} = 0 \quad z = 0 \quad (3.51)$$

Wie im vorhergehenden Abschnitt ergibt sich aus den Randbedingungen das Snelliussche Gesetz:

$$\frac{\sin \varphi}{\alpha} = \frac{\sin \varphi_1}{\alpha} = \frac{\sin \varphi'_1}{\beta} \quad (3.52)$$

Hieraus folgt $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi'_1 = \arcsin \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \sin \varphi \right) < \varphi$.

Mit (3.47), (3.48), (3.49) und

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu - 2\mu} = \frac{\rho\beta^2}{\rho\alpha^2 - 2\rho\beta^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2 - 2\beta^2}$$

erhält man aus (3.50):

$$\frac{1}{\alpha^2} (A_0 + A_1) (i\omega)^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha^2 - 2\beta^2} \left[(A_0 + A_1) \left(\frac{i\omega}{\alpha} \cos \varphi \right)^2 + B_1 \left(-\frac{i\omega}{\beta} \sin \varphi'_1 \right) \left(\frac{i\omega}{\beta} \cos \varphi'_1 \right) \right] = 0$$

Damit:

$$A_0 + A_1 + \frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 - 2\beta^2} \left[(A_0 + A_1) \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha^2} - B_1 \frac{\sin \varphi'_1 \cos \varphi'_1}{\beta^2} \right] = 0$$

Mit

$$1 + \frac{2\beta^2}{\alpha^2 - 2\beta^2} \cos^2 \varphi = \frac{2\beta^2}{\alpha^2 - 2\beta^2} \left(\frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 + \cos^2 \varphi \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\beta^2}{\alpha^2 - 2\beta^2} \left(\frac{\alpha^2}{2\beta^2} - \sin^2 \varphi \right) \\
&= \frac{\beta^2}{\alpha^2 - 2\beta^2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\sin^2 \varphi \right) \\
&= \frac{\gamma - 2\sin^2 \varphi}{\gamma - 2}
\end{aligned}$$

($\gamma = \frac{\alpha^2}{\beta^2} > 2$) erhält man

$$\frac{\gamma - 2\sin^2 \varphi}{\gamma - 2} (A_0 + A_1) - \frac{2\gamma \sin \varphi_1' \cos \varphi_1'}{\gamma - 2} B_1 = 0$$

und hieraus

$$(\gamma - 2\sin^2 \varphi) \frac{A_1}{A_0} - 2\sin \varphi (\gamma - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \frac{B_1}{A_0} = 2\sin^2 \varphi - \gamma. \quad (3.53)$$

Aus (3.51) folgt

$$2A_0 \left(-\frac{i\omega}{\alpha} \sin \varphi \right) \left(-\frac{i\omega}{\alpha} \cos \varphi \right) + 2A_1 \left(-\frac{i\omega}{\alpha} \sin \varphi \right) \left(\frac{i\omega}{\alpha} \cos \varphi \right) + B_1 \left(-\frac{i\omega}{\beta} \sin \varphi_1' \right)^2 - B_1 \left(\frac{i\omega}{\beta} \cos \varphi_1' \right)^2 = 0$$

oder

$$\frac{2\sin \varphi \cos \varphi}{\alpha^2} (A_0 - A_1) + \frac{\sin^2 \varphi_1' - \cos^2 \varphi_1'}{\beta^2} B_1 = 0.$$

Mit (3.52) ergibt sich

$$2\sin \varphi \cos \varphi \frac{A_1}{A_0} + (\gamma - 2\sin^2 \varphi) \frac{B_1}{A_0} = 2\sin \varphi \cos \varphi. \quad (3.54)$$

Aus (3.53) und (3.54) folgen die Amplitudenverhältnisse

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{4\sin^2 \varphi \cos \varphi (\gamma - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} - (\gamma - 2\sin^2 \varphi)^2}{4\sin^2 \varphi \cos \varphi (\gamma - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + (\gamma - 2\sin^2 \varphi)^2} \quad (3.55)$$

und

$$\frac{B_1}{A_0} = \frac{4\sin \varphi \cos \varphi (\gamma - 2\sin^2 \varphi)}{4\sin^2 \varphi \cos \varphi (\gamma - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + (\gamma - 2\sin^2 \varphi)^2}. \quad (3.56)$$

Um aus diesen Verhältnissen von Potentialamplituden solche von Verschiebungsamplituden zu bekommen (so waren die Koeffizienten R_{pp} und R_{ps} in 3.6.2 definiert), machen wir von (3.25) und (3.26) Gebrauch. Die Verschiebungsamplitude der einfallenden P -Welle ist hiernach $-\frac{i\omega}{\alpha} A_0$, die der reflektierten P -Welle $-\frac{i\omega}{\alpha} A_1$. Wir erhalten in diesem Fall also den PP -Reflexionskoeffizienten

$$R_{pp} = \frac{A_1}{A_0} \quad (3.57)$$

(siehe (3.55)).

Die Verschiebungsamplitude der reflektierten SV -Welle ist nach (3.26) gleich $-\frac{i\omega}{\beta} B_1$. Damit wird der PS -Reflexionskoeffizient

$$R_{ps} = \frac{\alpha B_1}{\beta A_0} \quad (3.58)$$

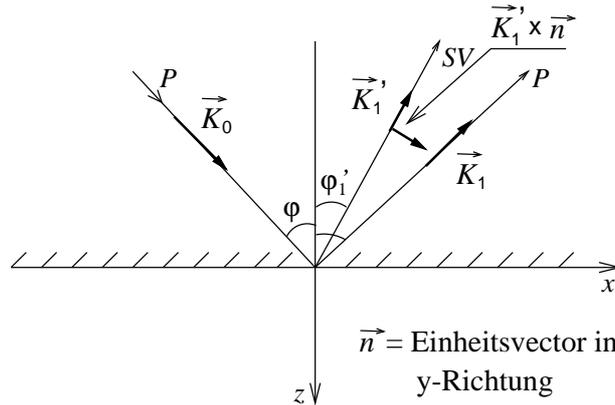
(siehe (3.56)).

R_{pp} und R_{ps} sind für alle Einfallswinkel φ *reel* und *frequenzunabhängig*. R_{ps} ist immer positiv. Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $R_{pp} = -1$ und $R_{ps} = 0$, d.h. es wird nur eine P -Welle reflektiert. Einige Resultate für R_{pp} und R_{ps} sind nachstehend wiedergegeben:



Was *negative Vorzeichen* der Reflexionskoeffizient hier bedeutet, sieht man, wenn man die Verschiebungsvektor der einfallenden und reflektierten Wellen mit (3.25) und (3.26) darstellt:

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 &= \text{grad } \Phi_0 = -\frac{i\omega}{\alpha} A_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x - \frac{\cos \varphi}{\alpha} z \right) \right] \vec{k}_0 \\ \vec{u}_1 &= \text{grad } \Phi_1 = -\frac{i\omega}{\alpha} A_0 R_{pp} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x + \frac{\cos \varphi}{\alpha} z \right) \right] \vec{k}_1 \\ \vec{u}'_1 &= \text{rot } \vec{\Psi} = -\frac{i\omega}{\beta} A_0 R_{ps} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi'_1}{\beta} x + \frac{\cos \varphi'_1}{\beta} z \right) \right] \vec{k}'_1 \times \vec{n}\end{aligned}$$



Wenn also $R_{pp} < 0$ ist, so heißt das: Zeigt in einem Punkt der Trennfläche $z = 0$ die Verschiebung der einfallende Welle etwa in die Richtung von \vec{k}_0 , so zeigt die der reflektierten P -Welle in die Richtung von $-\vec{k}_1$. Wäre auch $R_{ps} < 0$, so ginge im selben Fall die Verschiebung der reflektierten SV -Welle in die Richtung von $-\vec{k}'_1 \times \vec{n}$.

Diese Zusammenhänge werden noch anschaulicher, wenn wir vom harmonischen Fall zum *Impulsfall* übergehen (vgl. S.52). Da beim vorliegenden Problem die Reflexionskoeffizienten frequenzunabhängig sind, haben die reflektierten Wellen immer dieselbe Impulsform wie die einfallende Welle:

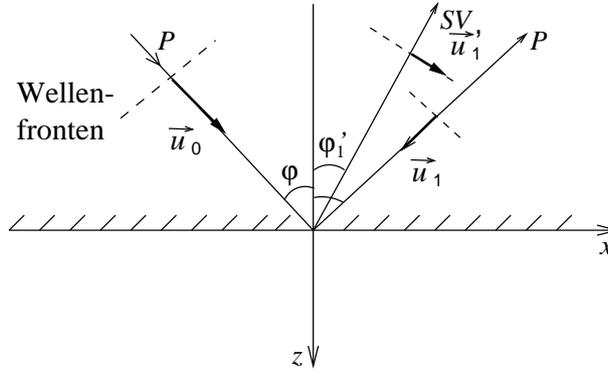
$$\vec{u}_0 = F \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x - \frac{\cos \varphi}{\alpha} z \right) \vec{k}_0 \quad (3.59)$$

$$\vec{u}_1 = R_{pp} F \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x + \frac{\cos \varphi}{\alpha} z \right) \vec{k}_1 \quad (3.60)$$

$$\vec{u}'_1 = R_{ps} F \left(t - \frac{\sin \varphi'_1}{\beta} x + \frac{\cos \varphi'_1}{\beta} z \right) \vec{k}'_1 \times \vec{n} \quad (3.61)$$

$$\varphi'_1 = \arcsin \left(\frac{\beta}{\alpha} \sin \varphi \right)$$

Wenn dann der *Erstausschlag* der einfallenden P -Welle auf die Trennfläche $z = 0$ zu gerichtet ist, ist es bei der reflektierten SV -Welle genauso und ebenso bei der reflektierten P -Welle, falls $R_{pp} < 0$ ist. Andernfalls zeigt der *Erstausschlag* der reflektierten P -Welle von der Trennfläche weg. In der Skizze ist $R_{pp} < 0$ angenommen:



Verschiebungen der Oberfläche

Abschließend berechnen wir noch die resultierenden Verschiebungen in der freien Oberfläche, in der sich die drei Wellen (3.59), (3.60) überlagern ($z=0$).

Horizontalverschiebung (positiv in x -Richtung):

$$\begin{aligned}
 u &= [(1 + R_{pp}) \sin \varphi + R_{ps} \cos \varphi'_1] F \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x \right) \\
 u &= f_u(\varphi) F \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x \right) \\
 f_u(\varphi) &= \frac{4\gamma \sin \varphi \cos \varphi (\gamma - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{4 \sin^2 \varphi \cos \varphi (\gamma - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + (\gamma - 2 \sin^2 \varphi)^2} \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

Vertikalverschiebung (positiv in z -Richtung):

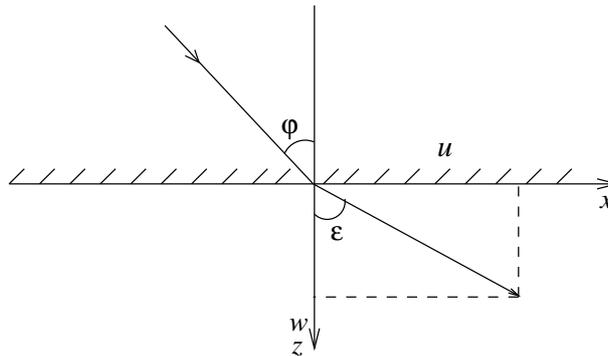
$$\begin{aligned}
 w &= [(1 - R_{pp}) \cos \varphi + R_{ps} \sin \varphi'_1] F \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x \right) \\
 w &= f_w(\varphi) F \left(t - \frac{\sin \varphi}{\alpha} x \right) \\
 f_w(\varphi) &= \frac{2\gamma \cos \varphi (\gamma - 2 \sin^2 \varphi)}{4 \sin^2 \varphi \cos \varphi (\gamma - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + (\gamma - 2 \sin^2 \varphi)^2} \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

Die Verstärkungsfaktoren (oder Übertragungsfunktionen der Oberfläche) $f_u(\varphi)$ und $f_w(\varphi)$ sind in der Skizze für den Fall $\gamma = 3$ wiedergegeben:

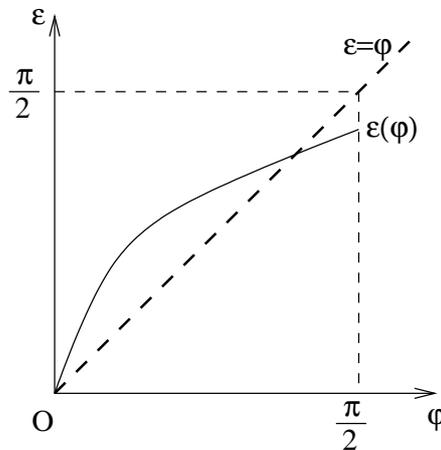
not found!

Längs der Oberfläche läuft also eine *linear polarisierte* Welle mit der Scheingeschwindigkeit $\alpha/\sin\varphi$. Der *Polarisationswinkel*

$$\epsilon = \arctan \frac{u}{w} = \arctan \left(\frac{2 \sin \varphi (\gamma - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\gamma - 2 \sin^2 \varphi} \right)$$



ist nicht gleich dem Einfallswinkel φ ; ϵ heißt auch *scheinbarer Einfallswinkel*. Der Zusammenhang zwischen ϵ und φ qualitativ wie folgt aus:



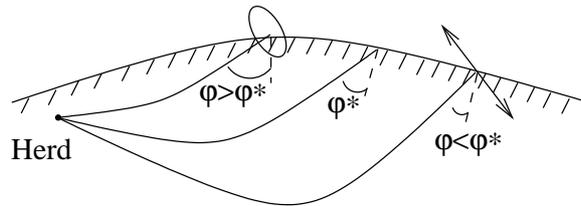
$$\epsilon \left(\frac{\pi}{2} \right) = \arctan \left(\frac{2(\gamma - 1)^{\frac{1}{2}}}{\gamma - 2} \right)$$

$$\epsilon'(0) = \frac{2}{\gamma^{\frac{1}{2}}}$$

Einfallende SV-Welle

Wenn anstelle der bisher betrachteten P-Welle eine SV-Welle auf eine freie Oberfläche einfällt, so wird für Einfallswinkel $\varphi > \varphi^* = \arcsin \frac{\beta}{\alpha}$ keine P-Welle mehr reflektiert, sondern nur noch eine SV-Welle ($|R_{ss}| = 1$). Das folgte aus Untersuchungen, die zu unseren für eine einfallende P-Welle

völlig analog sind. Für $\varphi < \varphi^*$ ist die Verschiebung der freien Oberfläche linear polarisiert, für $\varphi > \varphi^*$ aber *elliptisch*. Diese Eigenschaften beobachtet man tatsächlich: *SV*-Wellen von Erdbeben sind für Herdentfernungen kleiner als etwa 40° elliptisch polarisiert, für größere Entfernungen dagegen linear.



/

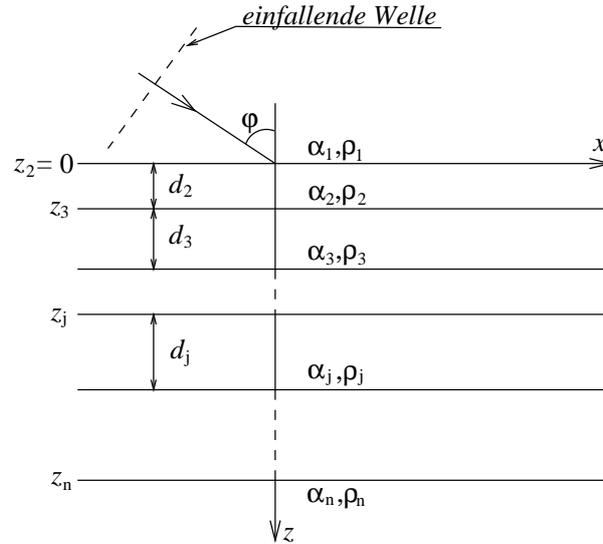
3.6.5 Reflexions- und Brechkoeffizienten von geschichteten Medien

Matrizenformalismus

In den letzten beiden Abschnitten untersuchten wir die Reflexion und Brechung ebener Wellen an *einer* Trennfläche. Im wesentlichen hängen die Reflexions- und Brechkoeffizienten in diesen Fällen von den Eigenschaften der Halbräume beiderseits der Trennfläche und vom Einfallswinkel ab. Nur wenn kritische Einfallswinkel überschritten werden, tritt eine schwache Frequenzabhängigkeit auf: das Vorzeichen der Phase der dann komplexen Koeffizienten wird vom Vorzeichen der Frequenz der einfallenden Welle bestimmt (vgl. Abschnitt 3.6.3). Die Frequenzabhängigkeit wird viel ausgeprägter, wenn wir zur Reflexion und Brechung ebener Wellen an (planparallel) *geschichteten* Medien übergehen, wobei also mindestens zwei Trennflächen auftreten. Dann gibt es ganz allgemein *Interferenzerscheinungen* und für spezielle Frequenzen (oder Wellenlängen) *konstruktive* oder *destruktive* Interferenz.

Wir wollen hier die Reflexion und Brechung von *P*-Wellen an einem Paket aus *flüssigen* Schichten zwischen zwei *flüssigen* Halbräumen untersuchen. Das entsprechende Problem für *SH*-Wellen in festen Medien ist sehr ähnlich zu lösen (wie überhaupt die Analogie zwischen *P*-Wellen in geschichteten flüssigen und *SH*-Wellen in geschichteten festen Medien sehr weitgehend ist). Die Behandlung von *P-SV*-Wellen in festen Medien (eventuell mit flüssigen Schichten dazwischen) ist vom Prinzip her genau dieselbe, die Ableitung wird aber viel komplizierter. Bei all diesen Problemen benutzt man einen *Matrizenformalismus*, der für den Gebrauch von Rechenmaschinen besonders günstig ist.

Wir wählen die Bezeichnung des flüssigen geschichteten Mediums wie in der folgenden Skizze.



Das Verschiebungspotential Φ_j in der j -ten Schicht ($j = 1, 2, \dots, n$) gehorcht der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_j^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2}.$$

Lösungen dieser Gleichung, die sich als zeitlich harmonische ebene Wellen interpretieren lassen, haben die Form

$$\exp [i (\omega t \pm k_j x \pm l_j z)].$$

Dabei ist $k_j^2 + l_j^2 = \omega / \alpha_j^2 \cdot k_j$ heißt *horizontale*, l_j *vertikale Wellenzahl*. Beide sollen nie negativ werden, l_j kann aber imaginär sein (siehe weiter unten). Dann können wir das Vorzeichen „+“ von $k_j x$ außer Betracht lassen, da es Wellen entspricht, die in $-x$ -Richtung laufen. Das kann bei unserer Wahl der einfallenden Welle nicht vorkommen. Die beiden Vorzeichen von $l_j z$ müssen wir aber beibehalten, da in allen Schichten (außer der n -ten) Wellen sowohl in $+z$ - als auch in $-z$ -Richtung laufen. Wir kommen so zu dem *Potentialansatz*:

$$\Phi_j = A_j \exp [i (\omega t - k_j x - l_j (z - z_j))] + B_j \exp [i (\omega t - k'_j x + l'_j (z - z_j))] \quad (3.64)$$

$$z_1 = z_2 = 0, \quad k_j^2 + l_j^2 = k_j'^2 + l_j'^2 = \frac{\omega^2}{\alpha_j^2} \quad (3.65)$$

$$B_n = 0 \quad (3.66)$$

Wir haben in (3.64) vorerst noch angenommen, dass die Wellenzahlen der in $+z$ - und $-z$ -Richtung laufenden Wellen verschieden sind. Weiterhin haben wir z durch $z - z_j$ ersetzt. Das ändert nichts an der Deutung der Terme, vereinfacht aber die Rechnung.

Der Anteil $A_1 \exp [i (\omega t - k_1 x - l_1 z)]$ von Φ_1 wollen wir als einfallende P -Welle interpretieren (vgl. z.B. (3.47)). Das bedeutet, dass k_1 und l_1 wie folgt mit dem Einfallswinkel φ verknüpft sind:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{\alpha_1} \sin \varphi \\ l_1 &= \frac{\omega}{\alpha_1} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

Der Anteil $B_1 \exp [i (\omega t - k'_1 x + l'_1 z)]$ von Φ_1 ist die an dem geschichteten Halbraum $z > 0$ reflektierte Welle. Was wir berechnen wollen, sind der Reflexionskoeffizient R_{pp} und der Brechungskoeffizient B_{pp} (wieder definiert als Verhältnis von *Verschiebungsamplituden*):

$$\left. \begin{aligned} R_{pp} &= \frac{B_1}{A_1} \\ B_{pp} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \cdot \frac{A_n}{A_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Die Randbedingungen in den Trennflächen $z = z_2, z_3, \dots, z_n$ fordern Stetigkeit der Vertikalverschiebung $\partial\Phi/\partial z$ und der Normalspannung $p_{zz} = \lambda\nabla^2\Phi = \rho\partial^2\Phi/\partial t^2$. Für $z = z_j$ ist also

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_j}{\partial z} &= \frac{\partial\Phi_{j-1}}{\partial z} \\ \text{und} \\ \rho_j \frac{\partial^2\Phi_j}{\partial t^2} &= \rho_{j-1} \frac{\partial^2\Phi_{j-1}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Aus der ersten Beziehung folgt (wir lassen den Phasenterm $e^{i\omega t}$ im folgenden immer weg, da er sich herauskürzt):

$$\begin{aligned} -l_j A_j \exp[-ik_j x] + l'_j B_j \exp[-ik'_j x] &= -l_{j-1} A_{j-1} \exp[i(-k_{j-1}x - l_{j-1}d_{j-1})] \\ &+ l'_{j-1} B_{j-1} \exp[i(-k'_{j-1}x + l'_{j-1}d_{j-1})] \end{aligned}$$

Aus der zweiten Beziehung folgt:

$$\begin{aligned} \rho_j A_j \exp[-ik_j x] + \rho_j B_j \exp[-ik'_j x] &= \rho_{j-1} A_{j-1} \exp[i(-k_{j-1}x - l_{j-1}d_{j-1})] \\ &+ \rho_{j-1} B_{j-1} \exp[i(-k'_{j-1}x - l'_{j-1}d_{j-1})] \end{aligned}$$

Beide Gleichungen gelten für $j = 2, 3, \dots, n$, und es ist $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$ ($d_1 = 0$). Wie schon früher müssen wir fordern, dass die von x abhängigen Exponentialterme sich herauskürzen. Das ergibt $k_j = k'_j = k_{j-1} = k'_{j-1}$. Hieraus folgt (mit (3.67)):

$$k'_n = k_n = k'_{n-1} = k_{n-1} = \dots = k'_1 = k_1 = \frac{\omega}{\alpha_1} \sin \varphi$$

Das ist eine andere Form des *Snelliusschen Gesetzes*. Mit (3.65) folgt hieraus noch

$$l'_j = l_j = \left(\frac{\omega^2}{\alpha_j^2} - k_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{\alpha_j} \left(1 - \frac{\alpha_j^2}{\alpha_1^2} \sin^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.69)$$

Ist $\sin \varphi > \alpha_1/\alpha_j$, so ist l_j imaginär und zwar *negativ imaginär*, denn nur dann wächst im Falle $j = n$ die Amplitude des Potentials nicht über alle Grenzen für $z \rightarrow \infty$. Damit erhält man folgendes Gleichungssystem, das A_j und B_j mit A_{j-1} und B_{j-1} verknüpft:

$$\begin{aligned} A_j - B_j &= \frac{l_{j-1}}{l_j} [A_{j-1} e^{-il_{j-1}d_{j-1}} - B_{j-1} e^{il_{j-1}d_{j-1}}] \\ A_j + B_j &= \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} [A_{j-1} e^{-il_{j-1}d_{j-1}} + B_{j-1} e^{il_{j-1}d_{j-1}}] \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich (bitte nachprüfen):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} &= \frac{e^{-il_{j-1}d_{j-1}}}{2l_j\rho_j} \begin{pmatrix} l_{j-1}\rho_j + l_j\rho_{j-1} & (-l_{j-1}\rho_j + l_j\rho_{j-1})e^{2il_{j-1}d_{j-1}} \\ -l_{j-1}\rho_j + l_j\rho_{j-1} & (l_{j-1}\rho_j + l_j\rho_{j-1})e^{2il_{j-1}d_{j-1}} \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{pmatrix} \\ &= m_j \cdot \begin{pmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$m_j = \text{Schichtmatrix}$

Wiederholte Anwendung von (3.70) ergibt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} &= \underline{m}_n \cdot \underline{m}_{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{m}_3 \cdot \underline{m}_2 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \\ &= \underline{M} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{11}M_{12} \\ M_{21}M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.6. REFLEXION UND BRECHUNG EBENER WELLEN AN DER EBENEN TRENNFLÄCHEN 63

Das Produkt \underline{M} der Schichtmatrizen \underline{m}_n bis \underline{m}_2 kann auf Rechenmaschinen einfach und schnell berechnet werden. Man gibt zunächst die Kreisfrequenz ω und den Einfallswinkel φ vor, berechnet mit (3.69) die l_j und multipliziert dann die Matrizen. Damit hat man die Elemente von \underline{M} . Aus

$$A_n = M_{11}A_1 + M_{12}B_1 \text{ und } B_n = M_{21}A_1 + M_{22}B_1$$

folgt mit (3.66)

$$\frac{B_1}{A_1} = -\frac{M_{21}}{M_{22}} \text{ und } \frac{A_n}{A_1} = M_{11} - \frac{M_{12}M_{21}}{M_{22}}.$$

Der Reflexionskoeffizient R_{pp} und der Brechungskoeffizient B_{pp} des geschichteten Mediums lauten also nach (3.68)

$$R_{pp} = -\frac{M_{21}}{M_{22}} \text{ und } B_{pp} = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \left(M_{11} - \frac{M_{12}M_{21}}{M_{22}} \right). \quad (3.71)$$

Zwei homogene Halbräume

In diesem einfachsten Fall ist (mit $d_1 = 0$)

$$\underline{M} = \underline{m}_2 = \frac{1}{2l_2\rho_2} \begin{pmatrix} l_1\rho_2 + l_2\rho_1 & -l_1\rho_2 + l_2\rho_1 \\ -l_1\rho_2 + l_2\rho_1 & l_1\rho_2 + l_2\rho_1 \end{pmatrix}$$

und demzufolge nach (3.71):

$$R_{pp} = \frac{-l_2\rho_1 + l_1\rho_2}{l_2\rho_1 + l_1\rho_2}$$

$$B_{pp} = \frac{\alpha_1 (l_1\rho_2 + l_2\rho_1)^2 - (l_2\rho_1 - l_1\rho_2)^2}{\alpha_2 2l_2\rho_2(l_2\rho_1 + l_1\rho_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{2l_1\rho_1}{l_2\rho_1 + l_1\rho_2}$$

Mit $l_1 = \frac{\omega}{\alpha_1} \cos \varphi$ und $l_2 = \frac{\omega}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \sin^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{\alpha_2} \cos \varphi_2$ (φ_2 =Brechungswinkel) erhält man:

$$R_{pp} = \frac{\rho_2\alpha_2 \cos \varphi - \rho_1\alpha_1 \cos \varphi_2}{\rho_2\alpha_2 \cos \varphi + \rho_1\alpha_1 \cos \varphi_2}$$

$$B_{pp} = \frac{2\rho_1\alpha_1 \cos \varphi}{\rho_2\alpha_2 \cos \varphi + \rho_1\alpha_1 \cos \varphi_2}$$

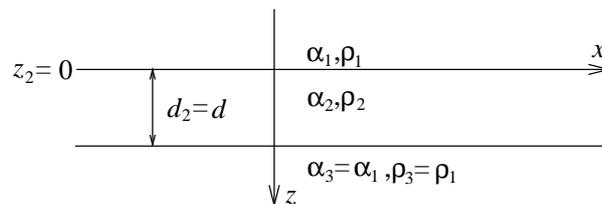
Man vergleiche mit Übung 3.6.3. Für $\varphi = 0$ ($\rightarrow \varphi_2 = 0$) erhält man

$$R_{pp} = \frac{\rho_2\alpha_2 - \rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1} \text{ und } B_{pp} = \frac{2\rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1}, \quad (3.72)$$

Formeln, die auch für eine Trennfläche zwischen zwei *festen* Halbräumen gelten.

Lamelle im Vollraum

Wir beschränken uns auf die Untersuchung von *Vertikalreflexionen* von der Lamelle.



In diesem Fall ist $n = 3$, $l_1 = l_3 = \omega/\alpha_1$ und $l_2 = \omega/\alpha_2$. Damit wird nach (3.70) mit $d_1 = 0$ und $d_2 = d$

$$\begin{aligned} \underline{m}_2 &= \frac{\alpha_2}{2\rho_2} \begin{pmatrix} \frac{\rho_2}{\alpha_1} + \frac{\rho_1}{\alpha_2} & -\frac{\rho_2}{\alpha_1} + \frac{\rho_1}{\alpha_2} \\ -\frac{\rho_2}{\alpha_1} + \frac{\rho_1}{\alpha_2} & \frac{\rho_2}{\alpha_1} + \frac{\rho_1}{\alpha_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 + \gamma & -1 + \gamma \\ -1 + \gamma & 1 + \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\underline{m}_3 = \frac{\alpha_1 e^{-i\omega \frac{d}{\alpha_2}}}{2\alpha_2} \begin{pmatrix} 1 + \gamma' & (-1 + \gamma')e^{2i\omega \frac{d}{\alpha_2}} \\ -1 + \gamma' & (1 + \gamma')e^{2i\omega \frac{d}{\alpha_2}} \end{pmatrix}$$

mit $\gamma = \frac{\rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2}$ und $\gamma' = \frac{\rho_2\alpha_2}{\rho_1\alpha_1} = \frac{1}{\gamma}$. Damit erhält man

$$\underline{M} = \underline{m}_3 \underline{m}_2 = \frac{e^{-i\omega \frac{d}{\alpha_2}}}{4\gamma} \begin{pmatrix} (1 + \gamma)^2 - (1 - \gamma)^2 e^{2i\omega \frac{d}{\alpha_2}} & \gamma^2 - 1 + (1 - \gamma^2)e^{2i\omega \frac{d}{\alpha_2}} \\ 1 - \gamma^2 + (\gamma^2 - 1)e^{2i\omega \frac{d}{\alpha_2}} & -(1 - \gamma)^2 + (1 + \gamma)^2 e^{2i\omega \frac{d}{\alpha_2}} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nur den *Reflexionskoeffizienten* R_{pp} (nach (3.71)):

$$R_{pp} = -\frac{M_{21}}{M_{22}} = \frac{(1 - \gamma^2)(1 - e^{2i\omega \frac{d}{\alpha_2}})}{(1 - \gamma)^2 - (1 + \gamma)^2 e^{2i\omega \frac{d}{\alpha_2}}} = R_0 \frac{1 - e^{-2i\omega \frac{d}{\alpha_2}}}{1 - R_0^2 e^{-2i\omega \frac{d}{\alpha_2}}} \quad (3.73)$$

mit

$$R_0 = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} = \frac{\rho_2\alpha_2 - \rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1}.$$

R_0 ist nach (3.72) der Reflexionskoeffizient der Trennfläche $z = 0$. Für relativ kleine Reflexionskoeffizienten R_0 , wie sie normalerweise in der Erde vorkommen ($|R_0| < 0.2$), gilt mit guter Näherung

$$R_{pp} = R_0 \left(1 - e^{-2i\omega \frac{d}{\alpha_2}}\right). \quad (3.74)$$

Diskussion von R_{pp} : R_{pp} in der Form (3.73) oder (3.74) verschwindet für solche Kreisfrequenzen ω , für die $2\omega \frac{d}{\alpha_2}$ ein gerades Vielfaches von π ist. Führen wir die Frequenz ν und die Wellenlänge Λ in der Lamelle ein ($\alpha_2 = \nu\Lambda$), so lautet die Bedingung (die eine für destruktive Interferenz ist):

$$\frac{d}{\Lambda} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (3.75)$$

Die Lamelle muss also ein Vielfaches der halben Wellenlänge dick sein, damit bei der *Reflexion destruktive Interferenz* mit $R_{pp} = 0$ auftritt. In diesem Fall liegt bei der *Brechung konstruktive Interferenz* vor.

R_{pp} ist nach (3.74) dem Betrag nach dann maximal ($|R_{pp}| = 2|R_0|$), wenn $2\omega \frac{d}{\alpha_2}$ ein ungerades Vielfaches von π ist. Dann ist:

$$\frac{d}{\Lambda} = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \dots \quad (3.76)$$

In diesem Fall interferieren die Wellen bei der *Reflexion konstruktiv* und bei der *Brechung destruktiv*.

Die in (3.75) und (3.76) sich andeutende Periodizität von R_{pp} gilt allgemein:

$$R_{pp} \left(\omega + n \frac{\alpha_2 \pi}{d} \right) = R_{pp}(\omega), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Abschließend diskutieren wir noch, wie die Reflexion von der Lamelle bei *Impulsanregung* aussieht. Wir nehmen an, dass die vertikal eingefallene P -Welle die Vertikalverschiebung $w_0 = F \left(t - \frac{z}{\alpha_1} \right)$

hat und dass $\overline{F}(\omega)$ das Spektrum von $F(t)$ ist. Die Vertikalverschiebung w_1 der reflektierten Welle lautet dann (vgl. S.52)

$$w_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{pp}(\omega) \overline{F}(\omega) e^{i\omega(t + \frac{z}{\alpha_1})} d\omega \quad (3.77)$$

mit $R_{pp}(\omega)$ aus (3.73). Für praktische Zwecke ist es am vernünftigsten, das Integral (3.77) numerisch zu berechnen, da es heute sehr schnelle numerische Methoden der *Fourieranalyse* (Berechnung des Spektrums aus der Zeitfunktion, etwa Berechnung von $\overline{F}(\omega)$ aus $F(t)$) und der *Fouriersynthese* (Berechnung der Zeitfunktion aus ihrem Spektrum, etwa Berechnung von w_1 aus seinem Spektrum $R_{pp}(\omega) \overline{F}(\omega) e^{i\omega z/\alpha_1}$) gibt, die unter dem Namen *Schnelle Fourier-Transformation* bekannt geworden sind.

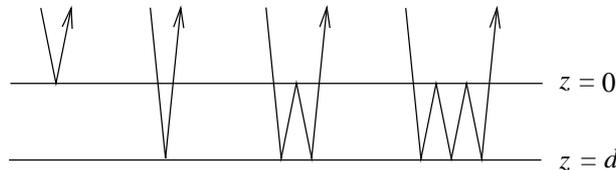
Einen guten Einblick in die Vorgänge des Reflexionsprozesses, um den es uns hier geht, erhält man aber auf andere Weise. Wir machen in (3.73) eine Reihenentwicklung (die wegen $R_0^2 < 1$ immer konvergiert):

$$\begin{aligned} R_{pp}(\omega) &= R_0 \left(1 - e^{-i\omega \frac{2d}{\alpha_2}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(R_0^2 e^{-i\omega \frac{2d}{\alpha_2}} \right)^n \\ &= R_0 - R_0 (1 - R_0^2) e^{-i\omega \frac{2d}{\alpha_2}} - R_0^3 (1 - R_0^2) e^{-i\omega \frac{4d}{\alpha_2}} \\ &\quad - R_0^5 (1 - R_0^2) e^{-i\omega \frac{6d}{\alpha_2}} - \dots \end{aligned} \quad (3.78)$$

Einsetzen in (3.77) und gliedweise Rücktransformation ergibt:

$$\begin{aligned} w_1 &= R_0 F \left(t + \frac{z}{\alpha_1} \right) - R_0 (1 - R_0^2) F \left(t + \frac{z}{\alpha_1} - \frac{2d}{\alpha_2} \right) \\ &\quad - R_0^3 (1 - R_0^2) F \left(t + \frac{z}{\alpha_1} - \frac{4d}{\alpha_2} \right) - R_0^5 (1 - R_0^2) F \left(t + \frac{z}{\alpha_1} - \frac{6d}{\alpha_2} \right) - \dots \end{aligned} \quad (3.79)$$

Das erste Glied ist die *Reflexion von der Trennfläche $z = 0$* . Ihre Amplitude ist, wie man es erwartet, gleich dem Reflexionskoeffizienten R_0 dieser Trennfläche. Das zweite Glied beschreibt eine Welle, die um die doppelte Laufzeit durch die Lamelle gegenüber dem ersten Term verspätet eintrifft, und entspricht daher der *Reflexion von der Trennfläche $z = d$* . Ihre Amplitude hat genau die erwartete Größe: der Reflexionskoeffizient dieser Trennfläche ist $-R_0$, das Produkt der Brechungskoeffizient dieser Trennfläche $z = 0$ für in $+z$ - und $-z$ -Richtung laufende Wellen, $2\rho_1\alpha_1/(\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1)$ und $2\rho_2\alpha_2/(\rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2)$, ist gleich $1 - R_0^2$. In genau derselben Weise lassen sich der dritte und der vierte Term in (3.79) interpretieren als *Mehrfachreflexion* innerhalb der Lamelle (mit drei bzw. fünf Reflexionen). Die in (3.79) aufgeführten Terme entsprechen den in der Skizze angegebenen *Strahlen*.



(3.79) ist eine *Zerlegung des reflektierten Wellenfeldes in (unendlich viele) Strahlenteile*. Sie ist der Darstellung (3.77) völlig äquivalent.

Die Näherung (3.74) für $R_{pp}(\omega)$ entspricht dem Abbrechen der Reihe in (3.78) nach dem Glied für $n = 0$ und damit der Beschränkung auf die beiden *Primärreflexion* von den Trennflächen $z = 0$ und $z = d$ (mit der Vernachlässigung von R_0^2 gegenüber 1).

Übung 3.10:

Man zeige: Für den Brechungskoeffizienten in (3.71) gilt

$$B_{pp} = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \frac{\det \underline{M}}{M_{22}} \quad \text{mit} \quad \det \underline{M} = \frac{l_1 \rho_1}{l_n \rho_n}.$$

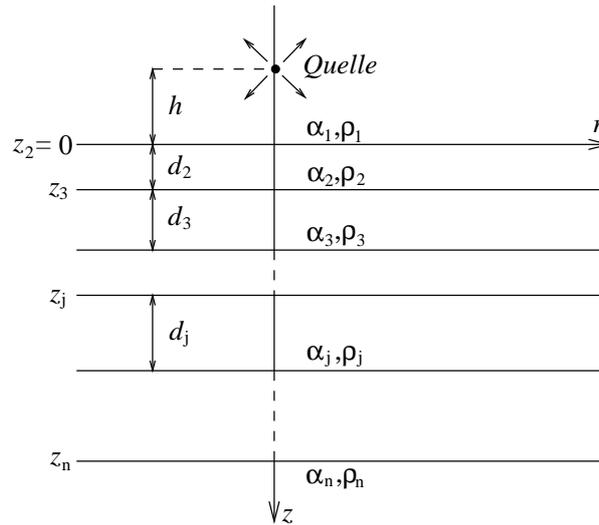
Man wende diese Formeln auf die Lamelle in den Fällen an, in denen (3.75) und (3.76) gelten.

Übung 3.11:

Die P -Geschwindigkeit der Lamelle sei größer als die des umgebenden Mediums: $\alpha_2 > \alpha_1$. Gibt es in diesem Fall Totalreflexion? Man argumentiere qualitativ.

3.7 Reflexion von Kugelwellen an geschichteten Medien (Reflektivitätsmethode)

Die Ergebnisse von Abschnitt 3.6.5 lassen sich relativ einfach erweitern auf eine Anregung durch Kugelwellen. Wir nehmen wieder zur Vereinfachung der Darstellung an, dass wir es nur mit P -Wellen in Flüssigkeiten zu tun haben.



Sie sollen von einer Explosions-Punktquelle herrühren, die sich in der Höhe h über dem geschichteten Medium befindet. Das Verschiebungspotential dieser Quelle bei harmonischer Anregung ist (vgl. Abschnitt 3.4)

$$\Phi_{1e} = \frac{1}{R} e^{i\omega \left(t - \frac{R}{\alpha_1} \right)} \quad (3.80)$$

mit $R^2 = r^2 + (z + h)^2$. Wegen der Symmetrie bei Rotation um die z -Achse benutzen wir Zylinderkoordinaten r und z . Die Wellengleichung für das Potential Φ_j in der j -ten Schicht lautet

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_j^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2}. \quad (3.81)$$

Elementare Lösungen dieser Gleichung sind (bitte nachrechnen oder Produktansatz machen)

$$J_0(kr) \exp [i(\omega t \pm l_j(z - z_j))] \quad \text{mit} \quad k^2 + l_j^2 = \frac{\omega^2}{\alpha_j^2}, \quad l_j = \left(\frac{\omega^2}{\alpha_j^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.82)$$

Wegen der Bezeichnungen vergleiche man mit S.61ff. $J_0(kr)$ ist die *Besselfunktion* erster Art und nullter Ordnung (vgl. Anhang C).

(3.82) ist das Analogon zu den Lösungen $e^{-i\omega_j x} \cdot e^{i(\omega t \pm l_j(z-z_j))}$ der Wellengleichung $\partial^2 \Phi_j / \partial x^2 + \partial^2 \Phi_j / \partial z^2 = (1/\alpha_j^2) \partial^2 \Phi_j / \partial t^2$, die im letzten Abschnitt zu lösen war (s. S.61). In (3.82) ist der Index j bei k weggelassen, da wir k als Parameter ansehen, über den noch integriert werden kann (außerdem hatte sich auf S.62 ergeben, dass beim dortigen Problem alle k_j gleich sind).

Mit (3.82) sind dann auch die Funktionen

$$\int_0^\infty f(k) J_0(kr) e^{i(\omega t \pm l_j(z-z_j))} dk \quad (3.83)$$

Lösungen von (3.81), vorausgesetzt, dass das Integral jeweils konvergiert. So kommen wir zu den Potentialansätzen

$$\Phi_j = \int_0^\infty J_0(kr) \left\{ A_j(k) e^{i(\omega t - l_j(z-z_j))} + B_j(k) e^{i(\omega t + l_j(z-z_j))} \right\} dk \quad (3.84)$$

(man beachte die Verwandtschaft zu (3.64)). Ob dieser Ansatz tatsächlich zu einer Lösung führt, hängen davon ab, ob sich *erstens* Φ_{1e} aus (3.80) in der Integralform (3.83) darstellen lässt und *zweitens*, ob wir den Φ_j nach (3.84) die Randbedingungen für $z = z_2, z_3, \dots, z_n$ erfüllen können.

Das erste ist erfüllt, da folgende Integraldarstellung gilt (*Sommerfeldintegral*, vgl. Anhang D):

$$\frac{1}{R} e^{i\omega \left(t - \frac{R}{\alpha_1} \right)} = \int_0^\infty J_0(kr) \frac{k}{il_1} e^{i(\omega t - l_1|z+h|)} dk \quad (3.85)$$

Wir können daher, analog zum Vorgehen auf S.61, den ersten Anteil

$$\int_0^\infty J_0(kr) A_1 e^{i(\omega t - l_1 z)} dk \quad (3.86)$$

von Φ_1 (mit $z_1 = 0$) als einfallende Welle Φ_{1e} interpretieren (der zweite Anteil ist die reflektierte Welle Φ_{1r}). Wir müssen (3.85) und (3.86) für Punkte vergleichen, die die Kugelwelle beim Einfallen auf die Trennfläche $z = 0$ passiert, also für $-h < z \leq 0$. In diesem Fall ist $|z+h| = z+h$, und der Vergleich ergibt $A_1(k) = (k/il_1) e^{-il_1 h}$.

Die *Randbedingungen* für die Trennflächen können von S.61 übernommen werden. Die Potentiale (3.84) werden unter Integralzeichen differenziert. Die aus den Randbedingungen folgende Gleichheit ist nur dann für *alle* r gegeben, wenn die Integranden übereinstimmen. Das führt auf dasselbe Gleichungssystem für $A_j(k)$ und $B_j(k)$ wie auf S.62) unten und daher auf (3.70). Bei der Berechnung der Schichtmatrizen hat man nun im Unterschied zum vorgehenden Abschnitt die l_j als Funktionen von k (und nicht vom Einfallswinkel φ) aufzufassen. k und φ sind aber verknüpft über

$$k = \frac{\omega}{\alpha_1} \sin \varphi. \quad (3.87)$$

Wenn man also nach S.63 den Reflexionskoeffizienten $R_{pp} = B_1/A_1 = -M_{21}/M_{22}$ als Funktion der Kreisfrequenz ω und des Einfallswinkels φ berechnet hat, so lässt sich die k -Abhängigkeit über (3.87) einführen: $R_{pp} = R_{pp}(\omega, k)$. Den zweiten Anteil von Φ_1 , die uns interessierende reflektierte Welle, kann man wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi_{1r} &= \int_0^\infty J_0(kr) A_1(k) R_{pp}(\omega, k) e^{i(\omega t - l_1 z)} dk \\ &= \int_0^\infty \frac{k}{il_1} J_0(kr) R_{pp}(\omega, k) e^{i(\omega t + l_1(z-h))} dk \end{aligned}$$

Die zugehörige Vertikalverschiebung ist

$$w_{1r}(r, z, \omega, t) = \frac{\partial \Phi_{1r}}{\partial r} = e^{i\omega t} \int_0^\infty k J_0(kr) R_{pp}(\omega, k) e^{il_1(z-r)} dk \quad (3.88)$$

und die Horizontalverschiebung (mit $J'_0(x) = -J_1(x)$)

$$u_{1r}(r, z, \omega, t) = \frac{\partial \Phi_{1r}}{\partial r} = e^{i\omega t} \int_0^\infty \frac{k^2}{il_1} J_1(kr) R_{pp}(\omega, k) e^{il_1(z-h)} dk \quad (3.89)$$

Die Integrale in (3.88) und (3.89) lassen sich am besten numerisch berechnet. Mit leistungsfähigen Rechenanlagen können auch kompliziert geschichtete Medien behandelt werden. Für *feste* Medien gelten (3.88) und (3.89) natürlich auch, nur ist hier der Reflexionskoeffizient $R_{pp}(\omega, k)$ viel umständlicher zu berechnen als für flüssige Medien, und w_{1r} und u_{1r} beschreiben nur den *Kompressionsanteil* der Reflexion von dem geschichteten Halbraum $z > 0$. Für den Scheranteil gelten ähnliche Ergebnisse, die nun den Reflexionskoeffizienten $R_{ps}(\omega, k)$ enthalten.

Der Übergang zur *Anregung durch Impulse*

$$\Phi_{1e} = \frac{1}{R} F \left(t - \frac{R}{\alpha_1} \right)$$

anstelle von (3.80) ist einfach (vgl. S.52). Wenn $\bar{F}(\omega)$ das Spektrum von $F(t)$ ist, gilt

$$\Phi_{1e} = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega \left(t - \frac{R}{\alpha_1} \right)} d\omega$$

Die zugehörigen Verschiebungen der reflektierten Welle sind

$$\left. \begin{array}{l} W_{1r}(r, z, t) \\ U_{1r}(r, z, t) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) \left\{ \begin{array}{l} w_{1r}(r, z, \omega, t) \\ u_{1r}(r, z, \omega, t) \end{array} \right\} d\omega \quad (3.90)$$

mit w_{1r} nach (3.88) und u_{1r} nach (3.89). Die Integrale in (3.88) und (3.89), multipliziert mit $\bar{F}(\omega)$, stellen also die *Fourier-Transformierten der Verschiebungen* dar.

Für die numerische Berechnung von (3.88), (3.89) und (3.90) hat sich die Bezeichnung *Reflexivitätsmethode* eingebürgert; sie ist ein praktikabler Weg zu *theoretischen Seismogrammen für Raumwellen*. Mit ihrer Hilfe kann man Raumwellen von Explosionen und Erdbeben einer Amplitudeninterpretation unterziehen und somit über die übliche *Laufzeitinterpretation* hinausgehen.

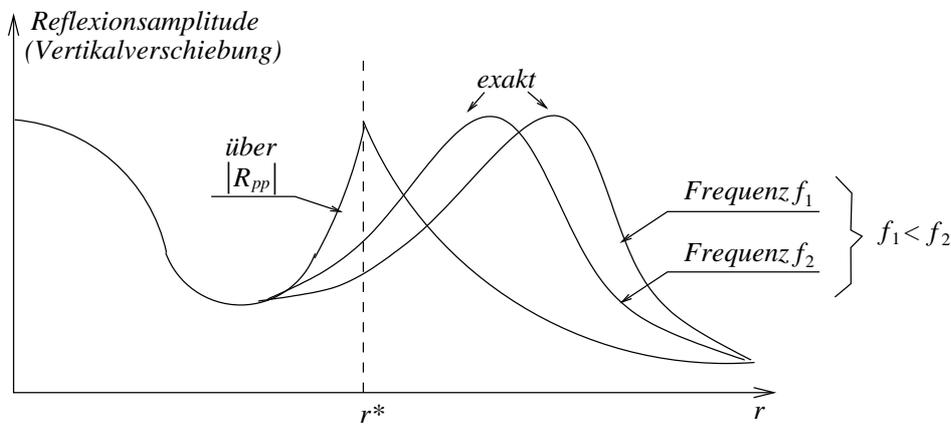
Ein Beispiel für theoretische Seismogramme ist unten wiedergegeben (aus der Arbeit von K. Fuchs: The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. Journ. of Physics of the Earth, vol. 16, Special Issue, S. 27-41, 1968). Es handelt sich um Ergebnisse für ein ganz einfaches Modell der Erdkruste. Sie ist als homogen angenommen. Die Punktquelle und die Aufpunkte liegen in der Erdoberfläche, deren Einfluss aber vernachlässigt ist. Der Übergang von der Erdkruste in den oberen Erdmantel (*Mohorovičić-Zone*, kurz *Moho*) ist eine *Diskontinuität 1. Ordnung*, d.h. die Wellengeschwindigkeiten und die Dichte ändern sich sprunghaft (bei einer *Diskontinuität 2. Ordnung* wären diese Größen zwar stetig, ihre Ableitung nach der Tiefe hätte aber einen Sprung).

not found!

Die Dominierende Welle ist die *Reflexion von der Moho*. Für Entfernungen von der Quelle jenseits des *kritischen Punktes* $r^* = 74.91\text{km}$, der dem *kritischen Einfallswinkel* φ^* entspricht, ist

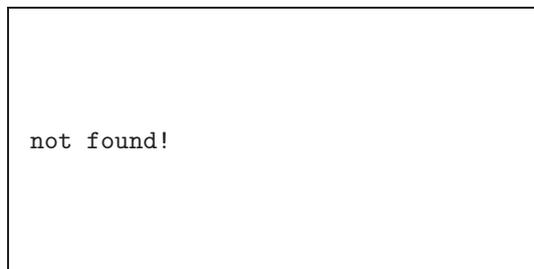
3.7. REFLEXION VON KUGELWELLEN AN GESCHICHTETEN MEDIEN (REFLEKTIVITÄTSMETHODE) 69

der erste Einsatz die *Kopfwelle* mit der Scheingeschwindigkeit 8.2km/sec . Ihre Amplitude nimmt sehr schnell mit wachsender Entfernung ab, ihre Impulsform ist etwa das zeitliche Integral der Reflexion für $r < r^*$. Für diese unterkritischen r ist die Form der Reflexion praktisch gleich der der einfallende Welle. *Beim kritischen Punkt beginnt sie, ihre Form zu ändern.* Das hatten wir bereits auf S.53 aus den Eigenschaften des Reflexionskoeffizienten für ebene Welle erschlossen (das gilt für P - wie für SH -Wellen). Für große Entfernungen ist die Impulsform etwa der für $r < r^*$ entgegengesetzt. Auch dies erwarten wir, weil der Reflexionskoeffizient R_{pp} für den Einfallswinkel $\varphi = \pi/2$ gleich -1 ist (für Flüssigkeiten folgt das aus der auf S.63 angegebenen Formel). Auch das *Amplitudenverhalten* der Reflexion wird durch den Verlauf des Betrags $|R_{pp}|$ des Reflexionskoeffizienten bereits relativ gut wiedergegeben, wenn man $|R_{pp}|$ noch durch den Laufweg dividiert und von der Gesamtverschiebung zur Vertikalkomponente übergeht (vgl. das qualitative Bild links auf S.52 bzw. die numerischen Resultate auf S.52). Nur im Bereich um den kritischen Punkt treten Diskrepanzen auf. Dem Verlauf von $|R_{pp}|$ zufolge müsste das Maximum der Reflexionsamplitude direkt am kritischen Punkt liegen, während es in Wirklichkeit zu größeren Entfernungen um einen Betrag verschoben ist, der von der dominierenden Frequenz der einfallende Welle abhängt:



Die Berücksichtigung dieser Verschiebung ist wichtig bei der Festlegung des kritischen Punktes von beobachteten Reflexionen, etwa in der Explosionsseismik.

Das folgende Bild demonstriert das *Potential der Reflektivitätsmethode*. Es zeigt vollständige SH -Seismogramme für ein Profil an der Oberfläche eines realistischen Erdmodells. Die Quelle ist eine horizontale Einzelkraft an der Erdoberfläche; sie wirkt senkrecht zum Profil. Die dominierende Periode ist 20 sec. Die markantesten Phasen sind die dispersiven Lovewellen (Oberflächenwellen, vgl. Abschnitt 4); ihre Amplituden sind zum großen Teil abgeschnitten. Die Laufwege der markantesten Raumwellen-Phasen (Mantelwellen S und SS , Kernreflexion ScS und Beugung S_{diff} am Erdkern) sind skizziert.

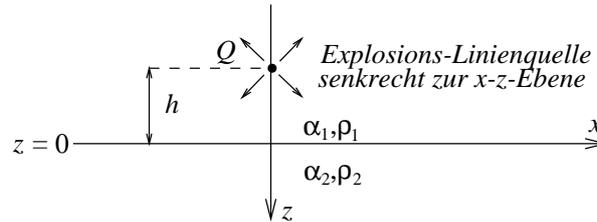


Eine ausführliche Darstellung der Reflektivitätsmethode findet man z.B. in der Arbeit G. Müller: The reflectivity method: a tutorial, Journ. Geophys., vol. 58, 153-174, 1985

3.8 Reflexion und Brechung von Zylinderwellen an einer ebenen Trennfläche (exakte oder generalisierte Strahlentheorie)

Wir setzen das Kapitel über elastische Raumwellen mit der Behandlung von *Zylinderwellen* fort, die von einer *Linienquelle* ausgehen und an einer Trennfläche, die parallel zu der Linienquelle liegt, reflektiert und gebrochen werden. Im Vergleich zu dem in Abschnitt 3.7 betrachteten Fall einer Punktquelle über einem geschichteten Medium ist das vorliegende Problem einfacher und weiter von praktischen Anwendungsmöglichkeiten entfernt. Wir werden aber eine ganz andere Behandlungsweise von Wellenausbreitungsvorgängen kennenlernen, die zu relativ einfachen *analytischen* (nicht nur numerisch auswertbaren) Resultaten führt, und darin liegt der eigentliche Sinn dieses Abschnitts. Überdies kann diese Methode, die auf Cagniard, de Hoop und Garvin zurückgeht (vgl. W. W. Garvin: Exact transient solution of the buried line source problem, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 234, S.528-541, 1956), auch auf kompliziert geschichtete Medien angewandt werden. Sie läßt sich dabei so abändern, dass die Anregung einer Punktquelle entspricht. In dieser Form ist diese Methode ähnlich wie die Reflektivitätsmethode zur Berechnung theoretischer Raumwellenseismogramme geeignet, die bei der Interpretation von Beobachtungen nützlich sein können.

Wir begnügen uns wieder damit, das Problem für ein *flüssiges* Modell (siehe Skizze) zu behandeln. Hieran können wir alles wesentliche lernen, und rein rechentechnische und Schreib- Aufwand ist ein Minimum.



Wir arbeiten mit den Verschiebungspotentialen $\Phi_1 = \Phi_{1e} + \Phi_{1r}$ im Halbraum 1 (Φ_{1e} = einfallende, Φ_{1r} = reflektierte P -Welle) und Φ_2 im Halbraum 2. Für alle drei Potentiale gelten Wellengleichungen:

$$\nabla^2 \Phi_{1e,r} = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_{1e,r}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \quad (3.91)$$

Die Laplace-Transformation dieser Gleichungen ergibt

$$\nabla^2 \varphi_{1e,r} = \frac{s^2}{\alpha_1^2} \varphi_{1e,r} \quad \text{und} \quad \nabla^2 \varphi_2 = \frac{s^2}{\alpha_2^2} \varphi_2, \quad (3.92)$$

wobei, $\varphi_{1e}, \varphi_{1r}$ und φ_2 die Transformaten von Φ_{1e}, Φ_{1r} und Φ_2 sind und s die Transformationsvariable ist (siehe Anhang A). Wir nehmen an, dass die P -Welle zum Zeitpunkt $t=0$ von der Linienquelle losläuft. Daher verschwinden außerhalb der Linienquelle die Anfangswerte von Φ_{1e}, Φ_{1r} und Φ_2 und ihrer zeitlichen Ableitungen für $t=+0$, die bei der Transformation der zweiten Ableitungen nach t in (3.91) berücksichtigt werden müssen.

Einfallende Zylinderwelle

Zunächst müssen wir die einfallende Welle untersuchen. Da die Linienquelle vom Explosionstyp ist und daher Zylindersymmetrie um ihre Achse besitzt, gilt

$$\nabla^2 \varphi_{1e} = \frac{\partial^2 \varphi_{1e}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_{1e}}{\partial R} = \frac{s^2}{\alpha_1^2} \varphi_{1e} \quad (3.93)$$

3.8. REFLEXION UND BRECHUNG VON ZYLINDERWELLEN AN EINER EBENEN TRENNFLÄCHE (EXAKT)

mit $R^2 = x^2 + (z + h)^2$. Diejenige Lösung von (3.93), die sich als Zylinderwelle in +R-Richtung interpretieren lässt, ist

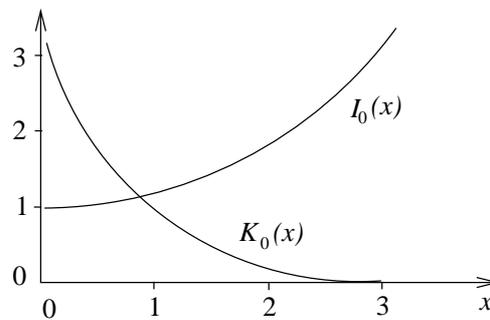
$$\varphi_{1e} = f(s) \frac{1}{s} K_0\left(\frac{R}{\alpha_1} s\right), \quad (3.94)$$

wobei $f(s)$ die Laplace-Transformierte einer beliebigen Zeitfunktion $F(t)$ ist und $K_0\left(\frac{R}{\alpha_1} s\right)$ eine der beiden *modifizierten Besselfunktionen* nullter Ordnung.

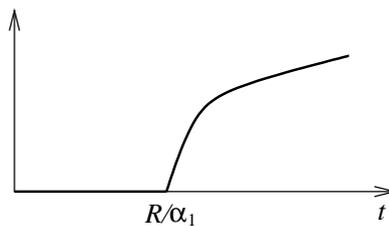
Nachweis: (3.93) lässt sich mit der Substitution $x = \frac{R_s}{\alpha_1}$ auf die Differentialgleichung der modifizierten Besselfunktionen zurückführen:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2) y = 0$$

Im vorliegenden Fall ist $n=0$. Die Differentialgleichung hat zwei linear unabhängige Lösungen, $K_0(x)$ und $I_0(x)$. Für reelle x gilt qualitativ nachstehendes Bild. Aus ihm ersieht man, dass für die Zylinderwelle nur $K_0(x)$ in Betracht kommt, denn $I_0(x)$ wächst für $x \rightarrow \infty$ über alle Grenzen. *Literatur:* M. Abramowitz und I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Funktionen, H. Deutsch, Frankfurt, 1985.



Machen wir die Rücktransformation von (3.94) in den Zeitbereich, so erhalten wir mit den Korrespondenzen



$$f(s) \bullet\text{---}\circ F(t) \quad (F(t) \equiv 0 \text{ für } t < 0)$$

$$\frac{1}{s} K_0\left(\frac{R}{\alpha_1} s\right) \bullet\text{---}\circ \begin{cases} 0 & \text{für } t < R/\alpha_1 \\ \cos h^{-1} \frac{\alpha_1 t}{R} & \text{für } t > R/\alpha_1 \end{cases}$$

das Potential

$$\Phi_{1e} = \int_{R/\alpha_1}^t F(t - \tau) \cos h^{-1} \frac{\alpha_1 \tau}{R} d\tau \quad (t \geq R/\alpha_1). \quad (3.95)$$

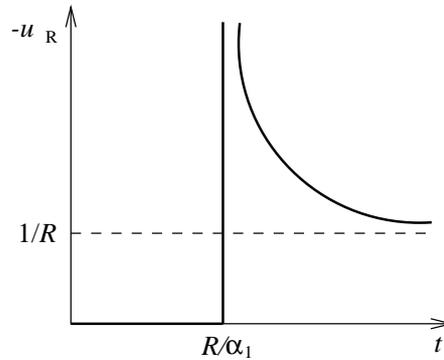
Durch Variation von $F(t)$ kann man der Zylinderwelle verschiedene Zeitgesetze geben. (3.95) ist das Analog zum Potential $\Phi_{1e} = \frac{1}{R}F\left(t - \frac{R}{\alpha_1}\right)$ einer Kugelwelle von einer Explosions-Punktquelle.

Im folgenden arbeiten wir mit dem *Sonderfall* $F(t) = \delta(t)$. An ihm kann man alle wesentlichen Erscheinungen studieren. Will man zu realistischen Anregungen übergehen, so müssen die Resultate für die Potentiale und Verschiebungen der reflektierten und der gebrochenen Welle, die wir für $F(t) = \delta(t)$ erhalten, mit realistischen $F(t)$ gefaltet werden. Für $F(t) = \delta(t)$ wird

$$\Phi_{1e} = \cos^{-1} \frac{\alpha_1 t}{R},$$

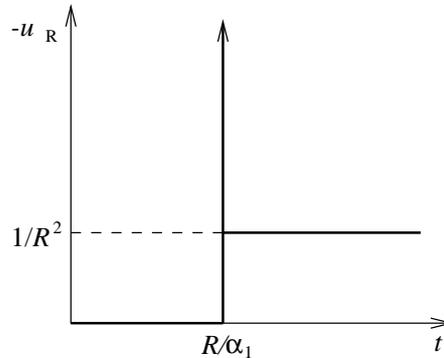
und die zugehörige Radialverschiebung in R-Richtung ist

$$U_R = \frac{\partial \Phi_{1e}}{\partial R} = -\frac{t}{R\left(t^2 - \frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)^{1/2}} \quad \left(t > \frac{R}{\alpha_1}\right). \quad (3.96)$$



Verwandte Punktquellen-Resultate sind:

$$\begin{aligned} \Phi_{1e} &= \frac{1}{R}H\left(t - \frac{R}{\alpha_1}\right) \\ U_R &= \frac{\partial \Phi_{1e}}{\partial R} = -\frac{1}{R^2}H\left(t - \frac{R}{\alpha_1}\right) - \frac{1}{R\alpha_1}\delta\left(t - \frac{R}{\alpha_1}\right) \end{aligned}$$



Wellenfrontapproximation für U_R

3.8. REFLEXION UND BRECHUNG VON ZYLINDERWELLEN AN EINER EBENEN TRENNFLÄCHE (EXAKT)

Wenn wir (3.96) wie folgt schreiben,

$$U_R = \frac{-t}{R \left(t + \frac{R}{\alpha_1}\right)^{1/2} \left(t - \frac{R}{\alpha_1}\right)^{1/2}},$$

und Werte von t in der Nähe von $\frac{R}{\alpha_1}$ betrachten, so erhalten wir die Näherung

$$U_R \approx \frac{-1}{(2R\alpha_1)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\left(t - \frac{R}{\alpha_1}\right)^{1/2}}. \quad (3.97)$$

Sie ist umso genauer, je näher t bei R/α_1 liegt, und kann daher *Wellenfrontapproximation* genannt werden. Sie gilt auch umso genauer, je größer R ist, und ist daher gleichzeitig die *Fernfeldapproximation* der Zylinderwelle.

Im Rahmen der Wellenfrontapproximation (3.97) ist die *Impulsform* der Zylinderwelle unabhängig von R , und ihre *Amplitude* ist proportional zu $R^{-1/2}$. Beide Aussagen werden besonders anschaulich, wenn man (3.97) mit realistischen Anregungsfunktionen $F(t)$ gefaltet denkt. Die Singularität in (3.96) und (3.97) ist interpretierbar.

Reflexion und Brechung der Zylinderwelle

Die Koordination, die der Untersuchung von Reflexion und Brechung am besten angepasst sind, sind die kartesischen Koordinaten x und z . Die Gleichungen (3.92) haben dann die Form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{s^2}{\alpha^2} \varphi$$

Elementare Lösungen, die für unsere Zwecke günstig sind, haben die Form $\cos(kx) \exp(\pm imz)$ mit $k^2 + m^2 = -s^2/\alpha^2$. Aus den elementaren Lösungen bauen wir wie auf S.67 komplizierte Lösungen in Integralform auf,

$$\varphi = \int_0^\infty f(k) \cos(kx) e^{\pm imz} dk,$$

mit denen wir *erstens* das Potential (3.94) der einfallenden Welle darzustellen und *zweitens* die Randbedingungen für $z=0$ zu erfüllen suchen. Im einzelnen machen wir folgende Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1e} &= \int_0^\infty A_1(k) \cos(kx) e^{-im_1 z} dk & (z > -h) \\ \varphi_{1r} &= \int_0^\infty B_1(k) \cos(kx) e^{im_1 z} dk \\ \varphi_2 &= \int_0^\infty A_2(k) \cos(kx) e^{-im_2 z} dk \end{aligned} \right\} \quad (3.98)$$

$$m_{1,2} = -i \left(k^2 + \frac{s^2}{\alpha_{1,2}^2} \right)^{1/2} \quad (\text{negativ imaginär für positiven Radikanden})$$

Für $K_0 \left(\frac{R}{\alpha_1} s \right)$ in (3.94) gibt es eine Integraldarstellung, ähnlich der Darstellung (3.85) der Kugelwelle. Damit wird φ_{1e} (mit $f(s)=1$, da $F(t) = \delta(t)$):

$$\varphi_{1e} = \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{1}{\left(k^2 + \frac{s^2}{\alpha_1^2}\right)^{1/2}} \cos(kx) \exp \left[-|z+h| \left(k^2 + \frac{s^2}{\alpha_1^2}\right)^{1/2} \right] dk \quad (3.99)$$

Der Vergleich mit φ_{1e} aus (3.98) für $z > -h$ ergibt

$$A_1(k) = \frac{e^{-im_1 h}}{ism_1}.$$

Die Randbedingungen für $z=0$ lauten (vgl. S.61):

$$\frac{\partial}{\partial z} (\Phi_{1e} + \Phi_{1r}) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi_{1e} + \Phi_{1r}) = \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2}$$

Die Laplacetransformation ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\varphi_{1e} + \varphi_{1r}) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad \rho_1 (\varphi_{1e} + \varphi_{1r}) = \rho_2 \varphi_2$$

Mit (3.98) erhält man

$$\begin{aligned} m_1 (A_1(k) - B_1(k)) &= m_2 A_2(k) \\ \rho_1 (A_1(k) + B_1(k)) &= \rho_2 A_2(k) \end{aligned}$$

und hieraus

$$B_1(k) = R_{pp}(k)A_1(k) \text{ und } A_2(k) = B_{pp}(k)A_1(k)$$

mit

$$R_{pp}(k) = \frac{\rho_2 m_1 - \rho_1 m_2}{\rho_2 m_1 + \rho_1 m_2} \text{ und } B_{pp}(k) = \frac{2\rho_1 m_1}{\rho_2 m_1 + \rho_1 m_2}. \quad (3.100)$$

Die Potentiale φ_{1r} und φ_2 lauten somit:

$$\begin{aligned} \varphi_{1r} &= \int_0^\infty A_1(k) R_{pp}(k) \cos(kx) e^{im_1 z} dk \\ \varphi_2 &= \int_0^\infty A_1(k) B_{pp}(k) \cos(kx) e^{-im_2 z} dk \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformierten w und u der Vertikal- und Horizontalverschiebungen W und U lauten allgemein $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ und $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und speziell:

$$\left. \begin{aligned} w_{1r} \\ u_{1r} \end{aligned} \right\} &= \int_0^\infty \frac{R_{pp}(k)}{s i m_1} \left\{ \begin{aligned} i m_1 \cos(kx) \\ -k \sin(kx) \end{aligned} \right\} e^{-i m_1 (h-z)} dk \\ \left. \begin{aligned} w_2 \\ u_2 \end{aligned} \right\} &= \int_0^\infty \frac{B_{pp}(k)}{s i m_1} \left\{ \begin{aligned} -i m_2 \cos(kx) \\ -k \sin(kx) \end{aligned} \right\} e^{-i (m_2 z + m_1 h)} dk \end{aligned} \quad (3.101)$$

Diese Laplace-Transformierten müssen nun *zurücktransformiert* werden. Es ist aussichtslos, dies mit der Formel (A.9) des Anhangs A durchzuführen. Man bedient sich vielmehr eines Tricks, der darauf beruht, (3.101) mit funktionentheoretischen Methoden so lange zu transformieren, bis die Integrale die Form

$$\left. \begin{aligned} w \\ u \end{aligned} \right\} = \int_0^\infty Z(t) e^{-st} dt \quad (3.102)$$

haben. Hieraus kann man *direkt* die Inverse $\left\{ \begin{aligned} W(t) \\ U(t) \end{aligned} \right\} = Z(t)$ entnehmen.

Eine wichtige Einschränkung müssen wir vorher noch machen. Wir betrachten nur *positiv reelle* s , d.h. wir betrachten nicht die ganze Konvergenzhalbebene der Laplace-Transformierten, sondern nur die positiv reelle Achse. Das vereinfacht die Rechnung stark, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, da die Laplace-Transformierte eine analytische Funktion ist und somit in der ganzen Konvergenzhalbebene durch ihre Werte auf der reellen Achse festgelegt wird. Dort sind die Integrale (3.101) reell.

Mit $\cos(kx) = \operatorname{Re}(e^{-ikx})$ und $\sin(kx) = \operatorname{Re}(ie^{-ikx})$ kann man (3.101) wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{aligned} w_{1r} \\ u_{1r} \end{aligned} \right\} &= \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{R_{pp}(k)}{s m_1} \left\{ \begin{aligned} m_1 \\ -k \end{aligned} \right\} e^{-i(kx + m_1(h-z))} dk \\ \left. \begin{aligned} w_2 \\ u_2 \end{aligned} \right\} &= \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{B_{pp}(k)}{s m_1} \left\{ \begin{aligned} -m_2 \\ -k \end{aligned} \right\} e^{-i(kx + m_1 h + m_2 z)} dk \end{aligned} \quad (3.103)$$

3.8. REFLEXION UND BRECHUNG VON ZYLINDERWELLEN AN EINER EBENEN TRENNFLÄCHE (EXAKT)

Der nächste Schritt ist ein Wechsel der Integrationsvariablen,

$$u = \frac{ik}{s},$$

womit nun der Integrationsweg entlang der positiv imaginären u -Achse verläuft. Die Transformation der Wurzeln $m_{1,2}$ ergibt

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= -i \left(-s^2 u^2 + \frac{s^2}{\alpha_{1,2}^2} \right)^{1/2} = -is (-u^2 + \alpha_{1,2}^{-2})^{1/2} \\ &= -s (u^2 - \alpha_{1,2}^{-2})^{1/2} = -sa_{1,2} \end{aligned}$$

mit

$$a_{1,2} = (u^2 - \alpha_{1,2}^{-2})^{1/2}. \quad (3.104)$$

Der transformierte Integrationsweg verläuft dabei in jedem Blatt der *Riemannschen Ebene* der Wurzeln $a_{1,2}$, in dem $a_{1,2} \simeq u$ für $|u| \rightarrow \infty$ gilt (und nicht in dem Blatt mit $a_{1,2} \simeq -u$). Führt man (3.104) in (3.100) ein, so erhält man

$$R_{pp}(u) = \frac{\rho_2 a_1 - \rho_1 a_2}{\rho_2 a_1 + \rho_1 a_2} \quad \text{und} \quad B_{pp}(u) = \frac{2\rho_1 a_1}{\rho_2 a_1 + \rho_1 a_2}. \quad (3.105)$$

Mit $k = -isu$ und $dk = -isd u$ erhält man schließlich aus (3.103):

$$\left. \begin{array}{l} w_{1r} \\ u_{1r} \end{array} \right\} = Re \int_0^{+i\infty} R_{pp}(u) \left\{ \begin{array}{l} -i \\ -\frac{u}{a_1} \end{array} \right\} e^{-s(ux - ia_1(h-z))} du \quad (3.106)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_2 \\ u_2 \end{array} \right\} = Re \int_0^{+i\infty} B_{pp}(u) \left\{ \begin{array}{l} i\frac{a_2}{a_1} \\ -\frac{u}{a_1} \end{array} \right\} e^{-s(ux - ia_1 h - ia_2 z)} du \quad (3.107)$$

Diese Ausdrücke haben schon eine gewisse Ähnlichkeit mit (3.102), da s nur noch in der e -Funktion auftritt. Der nächste Schritt ist zwangsläufig ein neuer Wechsel der Integrationsvariablen:

In (3.106):

$$t = ux - ia_1(h-z) \quad (3.108)$$

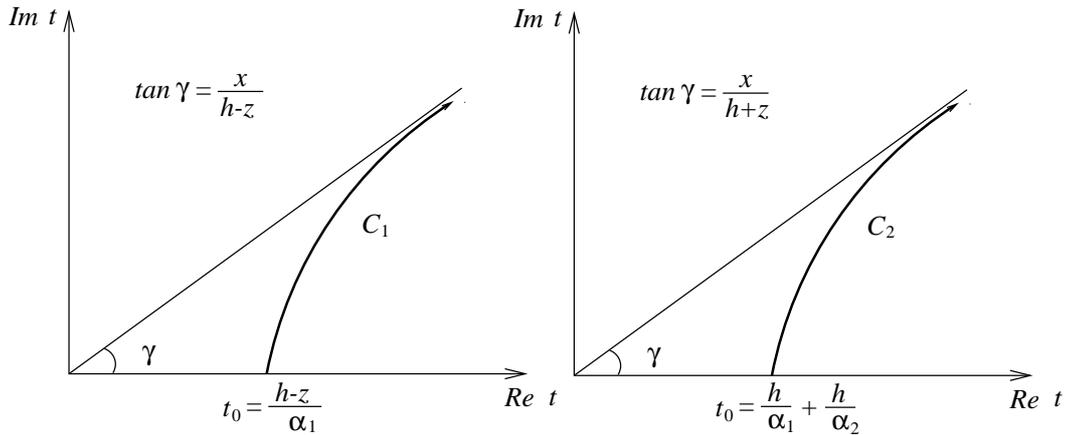
In (3.107):

$$t = ux - ia_1 h - ia_2 z \quad (3.109)$$

Aus diesen beiden Gleichungen hat man u als Funktion von t auszurechnen und in (3.106) und (3.107) einzusetzen. Das wird später genauer diskutiert. Gleichzeitig muss der Integrationsweg entsprechend transformiert werden. Für $u = 0$ folgt aus (3.108) und aus (3.109)

$$\left. \begin{array}{l} t(0) = t_0 = \frac{h-z}{\alpha_1} \\ t(0) = t_0 = \frac{h}{\alpha_1} + \frac{z}{\alpha_2} \end{array} \right\} \quad (3.110)$$

Die transformierten Integrationswege C_1 (bei (3.106)) und C_2 (bei (3.107)) beginnen also auf der positiv reellen t -Achse. Für $u \rightarrow +i\infty$ nähern sie sich einer Asymptote im ersten Quadranten, die durch den Ursprung geht und die Steigung $\tan \gamma = x/(h+z)$ (im Falle von (3.108)) und $\tan \gamma = x/(h+z)$ (im Falle von (3.109)) hat (in (3.108) ist z immer negativ, in (3.109) immer positiv). Das folgende Bild veranschaulicht die transformierten Integrationswege.



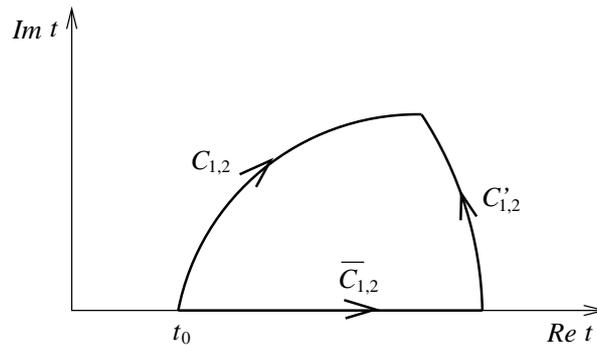
Im Falle der reflektierten Welle, der links dargestellt ist, ist C_1 ein Stück einer Hyperbel, im Falle der gebrochenen Welle ist die Kurve von höherer Ordnung, hat aber eine hyperbelähnliche Form.

Wir erhalten also:

$$\left. \begin{matrix} w_{1r} \\ u_{1r} \end{matrix} \right\} = \operatorname{Re} \int_{C_1} R_{pp}(u(t)) \left\{ \begin{matrix} -i \\ -\frac{u(t)}{a_1(u(t))} \end{matrix} \right\} \frac{du}{dt} e^{-st} dt \quad (3.111)$$

$$\left. \begin{matrix} w_2 \\ u_2 \end{matrix} \right\} = \operatorname{Re} \int_{C_2} B_{pp}(u(t)) \left\{ \begin{matrix} \frac{ia_2(u(t))}{a_1(u(t))} \\ -\frac{u(t)}{a_1(u(t))} \end{matrix} \right\} \frac{du}{dt} e^{-st} dt \quad (3.112)$$

Der letzte Schritt besteht nun darin, die Wege C_1 und C_2 gemäß dem *Cauchyschen Integralsatz* zur reellen Achse hin zu deformieren. Der Weg $C_{1,2}$ darf durch den Weg $C_{1,2} + C'_{1,2}$ der Skizze ersetzt werden, vorausgesetzt, dass zwischen den beiden Wegen keine Pole der Integranden in (3.111) und (3.112) liegen.



Das ist der Fall, da die einzigen Singularitäten die *Verzweigungspunkte* $u = \pm\alpha_1^{-1}$ von a_1 und $u = \pm\alpha_2^{-1}$ von a_2 sind. Diese sind aber keine Pole, sondern integrierbare Singularitäten. Schließlich verschwindet der Beitrag des Bogens $C'_{1,2}$, wenn dessen Radius unendlich groß wird. Damit sind wir am Ziel:

$$\left. \begin{matrix} w_{1r} \\ u_{1r} \end{matrix} \right\} = \int_{\frac{h-z}{\alpha_1}}^{\infty} \operatorname{Re} \left[R_{pp}(u(t)) \left\{ \begin{matrix} -i \\ -\frac{u(t)}{a_1(u(t))} \end{matrix} \right\} \frac{du}{dt} \right] e^{-st} dt + \int_0^{\frac{h-z}{\alpha_1}} [0] e^{-st} dt \quad (3.113)$$

$$\left. \begin{matrix} w_2 \\ u_2 \end{matrix} \right\} = \int_{\frac{h}{\alpha_1} + \frac{z}{\alpha_2}}^{\infty} \operatorname{Re} \left[B_{pp}(u(t)) \left\{ \begin{matrix} \frac{ia_2(u(t))}{a_1(u(t))} \\ -\frac{u(t)}{a_1(u(t))} \end{matrix} \right\} \frac{du}{dt} \right] e^{-st} dt + \int_0^{\frac{h}{\alpha_1} + \frac{z}{\alpha_2}} [0] e^{-st} dt \quad (3.114)$$

3.8. REFLEXION UND BRECHUNG VON ZYLINDERWELLEN AN EINER EBENEN TRENNFLÄCHE (EXAKT)

In diesen Ausdrücken braucht man tatsächlich den Realteil nur noch von der eckigen Klammer zu nehmen, da e^{-st} reell ist und nur über reelle t integriert wird. Die Hinzufügung des zweiten Integrals mit verschwindendem Wert geschah nur aus formalen Gründen, um tatsächlich gemäß (3.102) über t von 0 bis ∞ z integrieren. (3.113) und (3.114) haben also exakt die Standardform einer Laplace-Transformierten, aus der man die Originalfunktion *direkt* ablesen kann. Die Verschiebungen W_{1r} und U_{1r} der reflektierten Welle verschwinden demnach für Zeiten zwischen 0 und $(h-z)/\alpha_1$ (was einen nicht wundert, da $(h-z)/\alpha_1$ die Laufzeit senkrecht von der Quelle nach unten zur reflektierenden Trennfläche und wieder senkrecht zurück zum Niveau z des Aufpunktes ist und damit kleiner als oder höchstens gleich der Laufzeit des ersten reflektierten Einsatzes zu diesem Aufpunkt bleibt). Für $t > (h-z)/\alpha_1$ ist

$$\left. \begin{matrix} W_{1r} \\ U_{1r} \end{matrix} \right\} = \operatorname{Re} \left[R_{pp}(u(t)) \left\{ \begin{matrix} -i \\ -\frac{u(t)}{a_1(u(t))} \end{matrix} \right\} \frac{du}{dt} \right] \quad (3.115)$$

($u(t)$ aus (3.108)).

Analog verschwinden die Verschiebungen W_2 und U_2 der gebrochenen Welle für $0 \leq t < h/\alpha_1 + z/\alpha_2$, und für $t > h/\alpha_1 + z/\alpha_2$ gilt

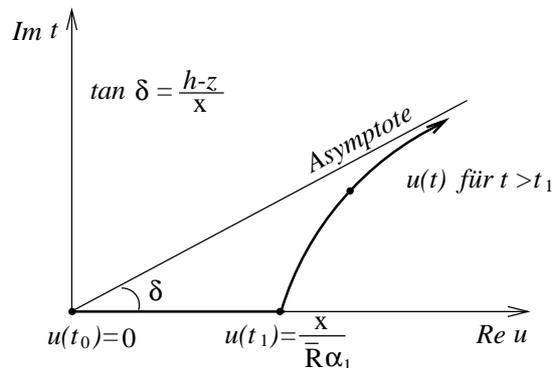
$$\left. \begin{matrix} W_2 \\ U_2 \end{matrix} \right\} = \operatorname{Re} \left[B_{pp}(u(t)) \left\{ \begin{matrix} \frac{ia_2(u(t))}{a_1(u(t))} \\ -\frac{u(t)}{a_1(u(t))} \end{matrix} \right\} \frac{du}{dt} \right] \quad (3.116)$$

($u(t)$ aus (3.109)).

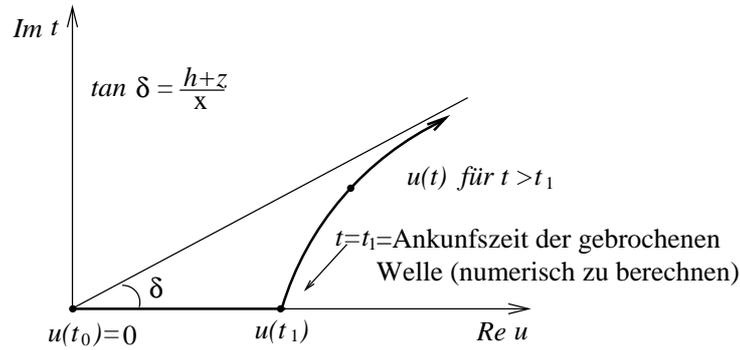
Alles, was wir brauchen, um diese recht einfach *algebraischen Funktionen* numerisch berechnen zu können, ist eine Auflösung von (3.108) und (3.109) nach u als Funktion von reellen Zeiten $t > t_0$ (aus (3.110)) und die Kenntnis der Ableitung $\frac{du}{dt}$. Im Falle von (3.108) ist das sehr einfach, da hier u explizit angegeben werden kann:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{x}{R}t - \frac{h-z}{R} (t_1^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} & \text{für } \frac{h-z}{\alpha_1} \leq t \leq t_1 = \frac{\bar{R}}{\alpha_1} \\ \frac{x}{R}t + i \frac{h-z}{R} (t^2 - t_1^2)^{\frac{1}{2}} & \text{für } t > t_1 \end{cases} \quad (3.117)$$

$\bar{R} = (x^2 + (h-z)^2)^{1/2}$ ist der Abstand des Aufpunktes vom Spiegelpunkt der Quelle, also vom Punkt mit den Koordinaten $x = 0$ und $z = +h$, und $t_1 = \bar{R}/\alpha_1$ ist die Laufzeit der eigentlichen Reflexion von der Trennfläche gemäß dem *Fermatschen Prinzip*. Die Kurve, auf der $u(t)$ läuft, ist in nachstehender Skizze angegeben. Die Ableitung du/dt kann aus (3.117) direkt berechnet werden. Sie hat eine Singularität bei $t = t_1$.



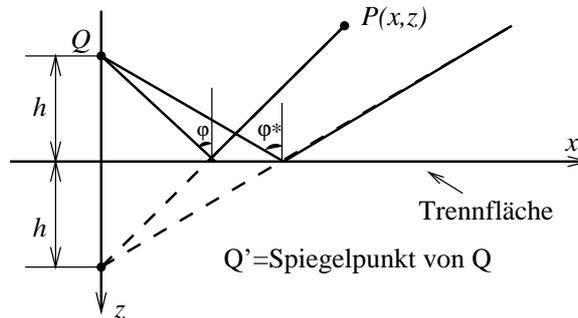
Im Falle der gebrochenen Welle muss $u(t)$ numerisch berechnet werden. Es ergibt sich aber ein ganz ähnliches Bild wie der reflektierten Welle:



Diese numerische Berechnung von $u(t)$ und seiner Ableitung ist ohne großen Aufwand möglich. Wir wollen darauf aber nicht näher eingehen, sondern nur die reflektierte Welle anhand von (3.115) und (3.117) näher diskutieren.

Diskussion der reflektierten Wellentypen

Wir nehmen an, dass die P -Geschwindigkeit im unteren Halbraum größer als im Halbraum mit der Linienquelle ist: $\alpha_2 > \alpha_1$. Zunächst betrachten wir Aufpunkte $P(x, z)$, für die $u(t_1) = x/(\bar{R}\alpha_1) < \alpha_2^{-1}$ ist. Da $x/\bar{R} = \sin \varphi$ ist ($\varphi =$ Einfallswinkel), heißt das $\sin \varphi < \alpha_1/\alpha_2 = \sin \varphi^*$ ($\varphi^* =$ kritischer Einfallswinkel) und bedeutet *unterkritischen Einfall der Zylinderwelle*.



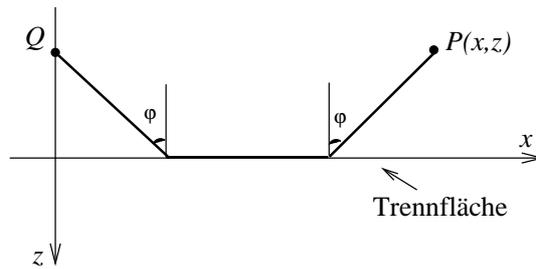
In diesem Fall ist für $t < t_1$ $u(t)$ kleiner als α_2^{-1} und damit erst recht kleiner als α_1^{-1} . Daher sind $a_1(u(t))$ und $a_2(u(t))$ nach (3.104) positiv imaginär, und $R_{pp}(u(t))$ ist nach (3.105) reell. Da du/dt für die betrachteten Zeiten reell ist, folgt aus (3.115), dass der Realteil der eckigen Klammern für alle $t < t_1$ verschwindet. Für $t > t_1$ wird aber $u(t)$ komplex, und der Realteil verschwindet nicht länger. Daher beginnt die Verschiebung zum Zeitpunkt $t = t_1$ (was einen nicht wundert).

Wenn $\alpha_1 < \alpha_2$ ist, gilt diese Argumentation für beliebig liegende Aufpunkte im oberen Halbraum.

Ist $u(t_1) = x/(\bar{R}\alpha_1) > \alpha_2^{-1}$, so ist der *Einfallswinkel* φ größer als φ^* , und wir erwarten als ersten Einsatz eine *Kopfwelle*. In diesem Fall wird $a_2(u(t))$ beim Durchgang durch den durch $u(t_2) = \alpha_2^{-1}$ definierten Zeitpunkt t_2 reell, ohne dass dasselbe für $a_1(u(t))$ gilt. Somit hat $R_{pp}(u(t))$ für $t > t_2$ nichtverschwindenden Real- und Imaginärteil, und demzufolge ist (3.115) bereits für $t > t_2$ ungleich Null. Setzen wir in (3.108) $u = \alpha_2^{-1}$, so erhalten wir

$$t_2 = \frac{x}{\alpha_2} + (h - z)(\alpha_1^{-2} - \alpha_2^{-2})^{\frac{1}{2}} < t_1.$$

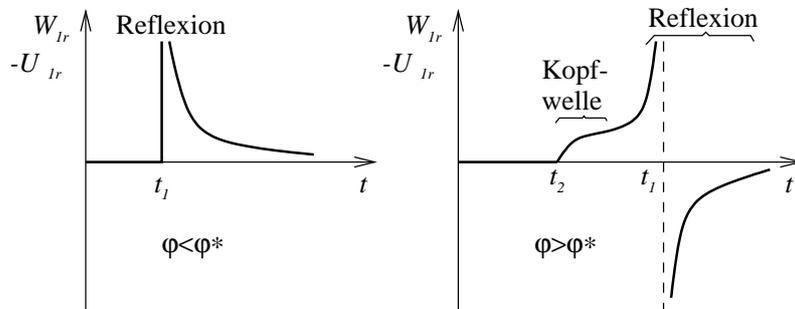
3.8. REFLEXION UND BRECHUNG VON ZYLINDERWELLEN AN EINER EBENEN TRENNFLÄCHE (EXAKT)



Das ist die Ankunftszeit der Kopfwelle, wie man sie nach dem Fermatschen Prinzip für den obenstehend gezeichneten Strahl von Q nach P(x,z) erwartet. Betrachten wir in diesem Fall noch den Zeitpunkt $t = t_1$, so erscheint es wegen des Knicks in der Kurve, auf der $u(t)$ läuft, für $t = t_1$ plausibel, dass dort markante Änderungen im Verlauf der Verschiebungen (3.115) auftreten, dass also die *eigentliche Reflexion* deutlich auszumachen ist. Das ist auch tatsächlich der Fall.

Unsere Ableitung hat ergeben, dass die Kopfwelle sich wie die eigentliche Reflexion aus dem Potential Φ_{1r} der reflektierten Welle ableitete, also keiner separaten Beschreibung bedurfte. Hätten wir festen Medien untersucht, so hätten wir unter Umständen noch einen weiteren Einsatz identifizieren können, der eine Oberflächen- oder Grenzschichtwelle ist (vgl. z.B. die auf S.70 zitierte Arbeit von Garvin). Ähnlich war es im Abschnitt 3.7 gewesen, wo die Kopfwelle im Bild auf S.68 automatisch in den Resultaten enthalten war. Die beiden Methoden zur Beschreibung des Wellenfeldes (die in 3.7 und hier gebrachte) ergeben also ein vollständiges Bild, soweit nicht aus numerischen Gründen Vernachlässigungen gemacht werden.

Die nachfolgende Skizze gibt ein qualitatives Bild der Verschreibung (sowohl in horizontaler als in vertikaler Richtung) für unterkritischen und überkritischen Einfall:



Für $t \rightarrow \infty$ ergeben sich von Null verschiedene Grenzwerte der Verschiebungen wie bei der einfallenden Welle (vgl. (3.96)). Die Singularitäten bei $t = t_1$ sind, wie man zeigen kann, in jedem Fall integrierbar. Daher ist die Faltung mit realistischen Anregungsfunktionen $F(t)$ ohne weiteres möglich. In der rechten Skizze beginnt die Verschiebung der eigentlichen Reflexion schon vor dem Zeitpunkt t_1 . Das Fermatsche Prinzip gibt also die Ankunftszeit in diesem Fall, wo die Reflexion *nicht der erste Einsatz* ist, nicht völlig exakt wieder. Bei Verwendung realistischer Anregungsfunktionen $F(t)$ ist der Unterschied normalerweise gering.

Ein durchgerechnetes Beispiel der Theorie dieses Abschnitts ist auf S. 80 wiedergegeben. Nähere Erläuterungen kann man von S.68 übernehmen, wo im wesentlichen derselbe Fall mit der dort beschriebenen Berechnungsmethode behandelt wurde.

Im Fall eines geschichteten Mediums mit *mehr als einer Trennfläche* kann man das Wellenfeld exakt in Strahlanteile zerlegen, wie wir es im einfachen Beispiel der Lamelle auf S.65 getan haben. Für jeden Strahlanteil gilt eine Formel von Typ (3.115) oder (3.116), und er enthält gegebenenfalls

auch Kopf- oder Grenzschichtwellenbeiträge. So erklärt sich der Name “exakte oder generalisierte Strahlentheorie”. Im Englischen ist die Bezeichnung Cagniard-de Hoop-Methode gebräuchlich.

Übung 3.12:

Man gebe für die Reflexion und die Kopfwelle Wellenfrontapproximationen an, d.h., man untersuche (3.115) in unmittelbarer Nähe der Ankunftszeiten t_1 (der Reflexion) und t_2 (der Kopfwelle). Man unterscheide hierbei *langsam* veränderliche Anteile, die man durch ihren Wert für $t = t_1$ bzw. $t = t_2$ ersetzen kann, und *schnell* veränderliche Terme, die von $t - t_1$, $t_1 - t$ und $t - t_2$ abhängen.

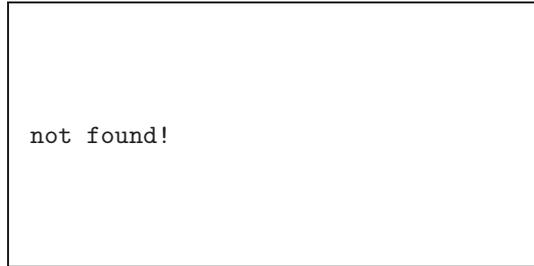


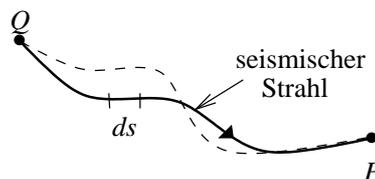
Abbildung aus G. Müller: Exact ray theory and its application to the reflexion of elastic waves from vertically inhomogeneous media, Geophys. Journ. R.A.S. 21, S. 261-283, 1970. Die Parameterwerte sind: $\alpha_1 = 6,4$ km/s, $\alpha_2 = 8,2$ km/s, $\rho_1 = 3,0$ g/cm³, $\rho_2 = 3,3$ g/cm³, $h = 30$ km, $z = -30$ km.

3.9 Strahlenseismik in kontinuierlich inhomogenen Medien

Mit der Reflektivitätsmethode und der generalisierten Strahlentheorie haben wir wellenseismische Methoden besprochen, die bei Anwendung auf *kontinuierlich inhomogene* Medien (in diesem Fall vertikal inhomogene Medien) eine Unterteilung in *homogene* Teilbereiche (in diesem Fall homogene Schichten) erfordern. Wellenseismische Methoden für kontinuierlich inhomogene Medien *ohne* diese Approximation sind häufig aufwendiger (vgl. das Beispiel in Abschnitt 3.10). Im vorliegenden Abschnitt soll die *strahlenseismische (oder strahlenoptische) Näherung* der Wellentheorie inhomogener Medien skizziert werden, und es soll gezeigt werden, dass sie aus der Bewegungsgleichung (2.20) des inhomogenen elastischen Kontinuums als *Hochfrequenzapproximation* hervorgeht. Wir beschränken uns wieder auf einen einfachen Fall, nämlich die Ausbreitung von *SH*-Wellen in einem zweidimensional inhomogenen Medium. Die Quelle soll eine Linienquelle in *y*-Richtung sein, Dichte ρ , *S*-Geschwindigkeit β und Schermodul μ hängen nur von *x* und *z* ab. Die einzige von Null verschiedene Verschiebungskomponente ist in *y*-Richtung, $v = v(x, z, t)$.

Fermatsches Prinzip und Strahlgleichung

Das *Fermatsche Prinzip* besagt, dass die Laufzeit der *SH*-Welle von der Quelle *Q* zu einem beliebigen Aufpunkt *P*, entlang dem realisierten seismischen Strahl ein Extremum und somit stationär ist, d.h. entlang jedem *infinitesimal benachbarten Weg* zwischen *P* und *Q* (gestrichelt in der Skizze) ist die Laufzeit entweder größer oder kleiner.



Im Normalfall ist die Laufzeit entlang dem seismischen Strahl ein Minimum; es gibt aber auch Fälle, wo ein Maximum vorliegt. Wenn wir einen zunächst beliebigen Weg von P nach Q durch die *Parameterdarstellung* $\{x = x(p), z = z(p)\}$ beschreiben, so ist das Element der Bogenlänge s

$$ds = \left[\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dp. \quad (3.118)$$

Wir betrachten nun *viele* solcher Wege von Q nach P . Sie alle haben denselben Wert $p = p_1$ bei Q bzw. $p = p_2$ bei P . Daher darf p nicht identisch mit s sein; z.B. der Winkel zwischen der Verbindungslinie vom Ursprung zum laufenden Punkt auf jedem Weg und der x - oder z - Achse sein. Der seismische Strahl ist derjenige Weg, bei dem

$$T = \int_{p_1}^{p_2} \beta^{-1}(x(p), z(p)) \left[\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dp = \int_{p_1}^{p_2} F \left(x, z, \frac{dx}{dp}, \frac{dz}{dp} \right) dp$$

$$\frac{dx}{dp} = x', \quad \frac{dz}{dp} = z'$$

ein Extremum ist. Damit ist die Bestimmung des seismischen Strahls auf eine Aufgabe der *Variationsrechnung* zurückgeführt. Sie führt auf die *Eulerschen Gleichungen*

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dp} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dp} \frac{\partial F}{\partial z'} = 0.$$

Hieraus erhält man z.B.

$$(x'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\beta(x, z)} \right) - \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{\beta(x, z)} \frac{x'}{(x'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0.$$

Division durch $(x'^2 + z'^2)^{1/2}$, Erweitern von Zähler und Nenner der eckigen Klammer mit dp und Benutzung von (3.118) liefert

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\beta} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\beta} \right). \quad (3.119)$$

Analog erhält man:

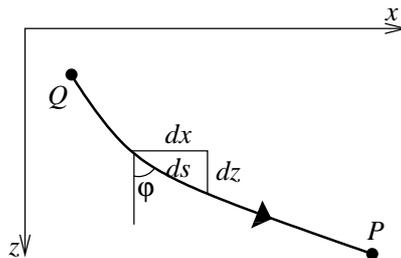
$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\beta} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\beta} \right) \quad (3.120)$$

(3.119) und (3.120) sind die *Differentialgleichungen des seismischen Strahls* mit der Parameterdarstellungen $\{x = x(s), z = z(s)\}$, worin s nun die Bogenlänge des Strahls ist. Mit

$$\frac{dx}{ds} = \sin \varphi, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \varphi$$

(φ = Winkel des Strahls gegen die z -Richtung) wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin \varphi}{\beta} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\beta} \right) \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos \varphi}{\beta} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\beta} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (3.121)$$



Aus beiden Gleichungen folgt eine andere Form der Strahlgleichung (Nachweis?):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{\beta} \left(\sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial z} - \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (3.122)$$

Diese Differentialgleichung für $\varphi(s)$ ist für numerische Berechnungen des Strahlverlaufs gut geeignet. Der Kehrwert von $d\varphi/ds$,

$$r = \frac{ds}{d\varphi} = \beta \left(\sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial z} - \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^{-1}, \quad (3.123)$$

ist der *Krümmungsradius* des Strahls. Der Strahl wird stark gekrümmt (r kleiner), wo die Geschwindigkeit sich stark ändert ($grad\beta$ groß).

Sonderfälle:

a) $\beta = \text{const}$

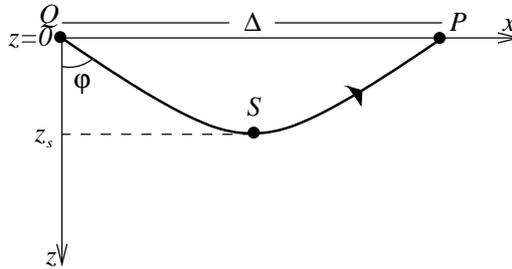
Aus (3.122) folgt $d\varphi/ds = 0$: der Strahl ist geradlinig.

b) $\beta = \beta(z)$ (keine Abhängigkeit von x)

Die erste Gleichung in (3.121) ergibt nach Integration

$$\frac{\sin \varphi}{\beta} = q = \text{const} \quad (3.124)$$

entlang des ganzen Strahls (*Snelliussches Gesetz*). q ist der *Strahlparameter* des Strahls. Für Quelle und Aufpunkte im Niveau $z = 0$ verläuft der Strahl symmetrisch in Bezug auf seinen Scheitel S . Der Strahlparameter q ist folgendermaßen mit dem Abstrahlwinkel φ_0 und den Geschwindigkeiten $\beta(0)$ an der Quelle bzw. $\beta(z_s)$ am Scheitel verknüpft:



$$q = \frac{\sin \varphi_0}{\beta(0)} = \frac{1}{\beta(z_s)}$$

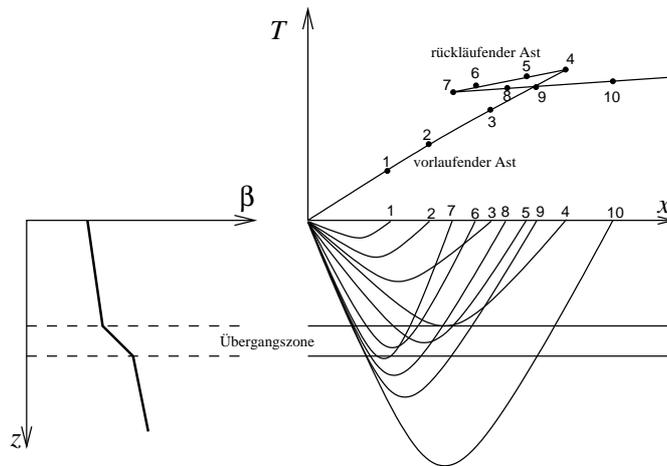
In der Tiefe z_s kann nur dann ein Strahlscheitel liegen, wenn $\beta(z) < \beta(z_s)$ für alle $z < z_s$ ist. Für die Entfernung Δ , in der der Strahl wieder im Niveau $z = 0$ auftaucht, gilt (unter Verwendung von (3.124)):

$$\Delta(q) = 2 \int_Q^S dx = 2 \int_0^{z_s} \tan \varphi dz = 2q \int_0^{z_s} [\beta^{-2}(z) - q^2]^{\frac{1}{2}} dz \quad (3.125)$$

Seine Laufzeit ist

$$T(q) = 2 \int_Q^S \frac{ds}{\beta} = 2 \int_0^{z_s} \frac{dz}{\beta \cos \varphi} = 2 \int_0^{z_s} \beta^{-2}(z) [\beta^{-2}(z) - q^2]^{-\frac{1}{2}} dz \quad (3.126)$$

(3.126) und (3.127) sind eine Parameterdarstellung der *Laufzeitkurve* des Modells. Ein Beispiel für Strahlverlauf und Laufzeitkurve eines Modells mit einer Übergangszone:



Für die *Steigung* der Laufzeitkurve gilt (Nachweis?):

$$\frac{dT}{d\Delta} = q \tag{3.127}$$

c) $\beta = a + bx + cz$ (lineare Abhängigkeit von x und z)

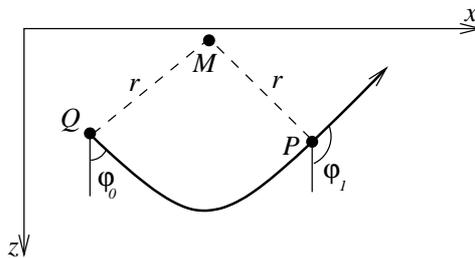
In diesem Fall folgt aus

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{c \sin \varphi - b \cos \varphi}{\beta}$$

durch Differentiation nach s (außer φ hängt noch β - über x und z - von s ab):

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{c \cos \varphi + b \sin \varphi}{\beta} \frac{d\varphi}{ds} - \frac{c \sin \varphi - b \cos \varphi}{\beta^2} (b \sin \varphi + c \cos \varphi) = 0$$

Dies bedeutet Konstanz von $d\varphi/ds$ und damit des Krümmungsradius entlang des ganzen Strahls. *Der Strahl ist also ein Kreis* bzw. ein Stück davon. Sein Radius r folgt aus (3.123), indem man dort β gleich dem Wert an der Quelle Q setzt und φ gleich dem Abstrahlwinkel φ_0 . Den Kreismittelpunkt M findet man von Q aus, wie in der Skizze angedeutet.



Die Laufzeit von Q nach P ist:

$$T = \int_Q^P \frac{ds}{\beta} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{c \sin \varphi - b \cos \varphi} = (c^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} \ln \left\{ \frac{\tan \left[\frac{(\varphi_1 - \delta)}{2} \right]}{\tan \left[\frac{(\varphi_0 - \delta)}{2} \right]} \right\}$$

mit $\delta = \arctan(b/c)$.

Ein *beliebiges* Geschwindigkeitsgesetz $\beta(x, z)$, das an diskreten Stützpunkten (x_n, z_n) gegeben ist, kann man zwischen jeweils 3 Punkten linear interpolieren. Dann lassen sich die gerade gefundenen Gesetzmäßigkeiten benutzen. Der Strahl besteht aus mehreren Kreisbögen, und an den Nahtstellen zweier Bereiche mit linearem Geschwindigkeitsgesetz ist die Strahltangente stetig. Ein entsprechendes Rechen- und Zeichenprogramm ist für viele praktische Anwendungen bereits ausreichend.

Übung 3.13:

a) Man zeige, dass der Punkt M auf der Geraden $\beta = 0$ liegt.

b) Man beweise die obige Formel für T.

Hochfrequenzapproximation der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung (2.20) des inhomogenen, isotropen Mediums vereinfacht sich im uns interessierenden Fall der *SH*-Wellen-Ausbreitung in einem zweidimensional inhomogenen Medium ohne Volumenkräfte wie folgt:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.128)$$

Im zeitlich harmonischen Fall machen wir den Ansatz

$$v(x, z, t) = A(x, z) \exp [i\omega (t - T(x, z))] . \quad (3.129)$$

Dies ist ein Ansatz für *hohe Frequenzen*, denn nur für solche Frequenzen können wir erwarten, dass Amplitude $A(x, z)$ und Laufzeitfunktion $T(x, z)$ im inhomogenen Medium frequenzunabhängig sind (im homogenen Medium fern von Trennflächen gilt dies für beliebige Frequenzen, sobald man einige Wellenlängen von Quelle entfernt ist). Setzt man (3.129) in (3.128) ein, so erhält man, wenn man nach Potenzen von ω ordnet:

$$\begin{aligned} & \omega^2 A \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - \rho \right\} \\ + i\omega A & \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial \ln A}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \ln A}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\} \\ & - \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.130)$$

Für hinreichend hohe Frequenzen sind die drei Terme dieser Gleichung von *verschiedener* Größenordnung. Das Verschwinden ihrer Summe zieht dann das Verschwinden der Terme selbst nach sich, *insbesondere der beiden ersten Terme*:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{\beta^2} \quad (3.131)$$

$$2\mu \left(\frac{\partial \ln A}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \ln A}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - \mu \nabla^2 T \quad (3.132)$$

(3.131) ist die *Eikonalgleichung* und enthält auf der rechten Seite die ortsabhängige *S*-Geschwindigkeit $\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$. Nach ihrer Lösung setzt man das Eikonal T in die *Transportgleichung* (3.132) ein und bestimmt $\ln A$ und hieraus A . Damit ist das Problem im Prinzip gelöst. Der frequenzunabhängige dritte Term in (3.130) wird normalerweise mit dem aus (3.132) folgenden A nicht verschwinden. Die Lösung (3.129) ist also nicht exakt, aber umso exakter, je höher die Frequenz ist.

Wie müssen noch die Bedingung ableiten, unter der die ersten beiden Terme in (3.130) tatsächlich von verschiedener Größenordnung sind und die Aufspaltung in (3.131) und (3.132) gilt. Diese

Bedingung folgt aus der Forderung, dass die *einzelnen* Summanden im zweiten Term klein sein müssen gegen die *einzelnen* Summanden im ersten Term. Betrachten wir z.B. den jeweils ersten Summanden, so muss sein:

$$\left| \omega \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \right| \ll \omega^2 \mu \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2$$

Aus (3.131) folgt größenordnungsmäßig $|\partial T / \partial x| = 1/\beta$. Damit:

$$\left| \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right| \ll \omega$$

Mit $\mu = \rho\beta^2$ erhält man

$$\left| \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right| \ll \omega. \quad (3.133)$$

Auf ähnliche Beziehungen kommt man über andere Summanden in (3.130). Normalerweise formuliert man die gesuchte Bedingung so: die Hochfrequenzapproximationen (3.131) und (3.132) gelten für Frequenzen, die groß gegenüber den *Geschwindigkeitsgradienten* sind:

$$\omega \gg |\text{grad}\beta| = \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.134)$$

(3.133) zeigt aber, dass auch die Dichtegradienten einen Einfluss ausüben. Man kann (3.134) noch anschaulicher formulieren: die relative Änderung der Geschwindigkeit über die Strecke einer Wellenlänge hinweg muss klein gegen 1 sein (Nachweis?).

Beispiel:

Wir lösen (3.131) und (3.132) im einfachsten Fall einer ebenen, in z-Richtung laufenden *SH*-Welle unter der Annahme, dass ρ , β und μ nur von z abhängen. Der Ansatz (3.129) vereinfacht sich zu

$$v(z, t) = A(z) \exp [i\omega (t - T(z))]. \quad (3.135)$$

Die Lösung von (3.131) ist:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{\beta(z)}, \quad T(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\beta(\zeta)}$$

$T(z)$ ist die *S-Wellen-Laufzeit*, bezogen auf das Referenzniveau $z = 0$. (3.132) lautet:

$$\frac{2\mu}{\beta} \frac{d \ln A}{dz} = -\frac{1}{\beta} \frac{d\mu}{dz} + \frac{\mu}{\beta^2} \frac{d\beta}{dz}$$

Hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln A}{dz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d \ln \beta}{dz} - \frac{d \ln \mu}{dz} \right) = \frac{d \ln (\rho\beta)^{-\frac{1}{2}}}{dz} \\ A(z) &= A(0) \left[\frac{\rho(0)\beta(0)}{\rho(z)\beta(z)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Die Amplituden der *SH*-Welle ändern sich also umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Impedanz $\rho\beta$. Damit lautet die Lösung (3.135):

$$v(z, t) = A(0) \left[\frac{\rho(0)\beta(0)}{\rho(z)\beta(z)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[i\omega \left(t - \int_0^z \frac{d\zeta}{\beta(\zeta)} \right) \right] \quad (3.136)$$

Aus diesem Ergebnis schließen wir, dass sich in dem betrachteten Fall eine *impulsive*, hochfrequente *SH*-Welle in der Form unverändert ausbreiten würde.

Übung 3.14:

Man lasse Geschwindigkeit β und Dichte ρ nicht *kontinuierlich* von der Tiefe 0 bis zur Tiefe z variieren, sondern *sprunghaft* irgendwo dazwischen. Dann erhält man die Amplitude über den *SH*-Brechungskoeffizienten (3.40) exakt. Man zeige, dass (3.136) dasselbe ergibt, vorausgesetzt, die relative Impedanzänderung ist klein gegen 1.

Eikonalgleichung und seismische Strahlen

Aus dem Ansatz (3.129) folgt, dass Flächen konstanter Phase durch

$$t - T(x, z) = \text{const}$$

festgelegt sind. Im Impulsfall sind diese Flächen Wellenfronten, die gestörtes und ungestörtes Gebiet trennen. Wir nennen sie daher auch hier Wellenfront. Durch vollständige Differentiation nach t folgt

$$\frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \text{grad} T \cdot \frac{\vec{dx}}{dt} = 1, \quad (3.137)$$

wobei $\vec{dx}/dt = (dx/dt, 0, dz/dt)$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich die Wellenfront ausbreitet. Die nächstliegende Interpretation von (3.137) im Fall isotroper Medien ist, dass \vec{dx}/dt und der auf der Wellenfront senkrecht stehende Vektor $\text{grad} T$ parallel sind. Weil $|\text{grad} T| = 1/\beta$ ist (folgt aus der Eikonalgleichung (3.131)), gilt dann: $|\vec{dx}/dt| = \beta$. Das heißt, dass die Wellenfronten sich senkrecht zu sich selbst mit der lokalen Geschwindigkeit β fortbewegt. Die *Orthogonaltrajektorien der Wellenfronten* definieren wir als seismische Strahlen. Wir müssen dann noch zeigen, dass sie mit den über das Fermatsche Prinzip definierten Strahlen übereinstimmen. Wir zeigen dies, indem wir nachweisen, dass die Differentialgleichungen (3.119) und (3.120) des seismischen Strahls sich auch über die Eikonalgleichung ergeben. Wie früher beschreiben wir den Strahl durch die Parameterdarstellung $\{x = x(s), z = z(s)\}$ mit der Bogenlänge s . Der Vektor $\vec{dx}/ds = (dx/ds, 0, dz/ds)$ ist ein Einheitsvektor in Strahlrichtung, für den nach dem soeben Gesagten auch gilt

$$\frac{\vec{dx}}{ds} = \beta \text{grad} T = \beta (\partial T / \partial x, 0, \partial T / \partial z). \quad (3.138)$$

Es gilt also zunächst anstelle von (3.119)

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\beta} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Wir formen die rechte Seite weiter um unter Benutzung von (3.138) und der Eikonalgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\beta} \frac{dx}{ds} \right) &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} \frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\beta^2} \right) \\ &= \frac{\beta (-2)}{2} \frac{\partial \beta}{\beta^3} \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\beta} \right) \end{aligned}$$

Wir erhalten also (3.119) vollständig; der Nachweis bei (3.120) ist analog. Wir geben noch die *Strahlgleichung in Vektorform* an (sie gilt auch im dreidimensionalen Fall):

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\vec{dx}}{ds} \right) = \text{grad} \frac{1}{\beta} \quad (3.139)$$

Insgesamt haben wir nun bewiesen, dass die *Strahlenseismik eine Hochfrequenzapproximation der Wellenseismik* ist. Wir haben die Untersuchung beschränkt auf die *kinematischen* Aspekte der

Wellenausbreitung, also auf die Diskussion von Wellenwegen, Laufzeiten und Phasen. *Dynamische* Größen, insbesondere Amplituden, wurden (außer in einem ganz einfachen Beispiel) nicht betrachtet. Der folgende Abschnitt bringt hierzu mehr.

Vorher geben wir noch die Form von (3.139) an, die für numerische Berechnungen häufig benutzt wird, besonders im dreidimensionalen Fall. Man ersetzt die *eine* gewöhnliche Differentialgleichung 2.Ordnung für \vec{x} , (3.139), durch ein System von *zwei* Gleichungen 1.Ordnung für \vec{x} und den sogenannten Langsamkeitsvektor $\vec{p} = \frac{1}{\beta} \frac{d\vec{x}}{ds}$ (Vektor in Strahlrichtung mit dem Betrag $\frac{1}{\beta}$):

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \beta \vec{p}, \quad \frac{d\vec{p}}{ds} = \text{grad} \frac{1}{\beta}$$

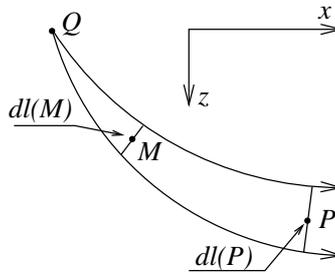
Für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1.Ordnung gilt es effektive numerische Lösungsmethoden, z.B. das Runge-Kutta-Verfahren.

Amplituden in strahlenseismischer Näherung

Im Rahmen der aus dem Fermatschen Prinzip entwickelten Strahlenseismik ist es üblich, Amplituden über die Annahme zu berechnen, dass die Energie, die von der Quelle innerhalb eines schmalen Strahlbündels abgestrahlt wird, innerhalb dieses Bündels bleibt. Es tritt also keine Energie seitlich aus dem Bündel durch Diffraktion aus, und es wird auch keine Energie in die Gegenrichtung der Strahlen zurückreflektiert. Beides gilt nur für hohe Frequenzen. Im Folgenden wird eine Formel abgeleitet, die die Änderung der Verschiebungsamplitude entlang eines Strahles beschreibt, der von einer Linienquelle in einem zweidimensional inhomogenen Medium ausgeht. Das Medium soll keine Diskontinuitäten besitzen.

Wir betrachten (vgl. die Skizze) ein von der Linienquelle Q ausgehendes Strahlbündel, dessen Breite am Referenzpunkt M nahe bei Q gleich $dl(M)$ und am Aufpunkt P gleich $dl(P)$ ist. Für die Verschiebung sowohl in M als auch in P gilt (3.129) bzw. die reelle Form

$$v = A \sin [\omega(t - T)].$$



Unser Ziel ist die Bestimmung des Amplitudenverhältnisses $A(P)/A(M)$. Dazu bestimmen wir zunächst die Energiedichte der Welle, also die Summe aus kinematischer und potentieller Energie pro Volumeneinheit. Die kinetische Energiedichte ist $\frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2 [\omega(t - T)]$. Über die Periode $2\pi/\omega$ gemittelt, sind potentielle und kinematische Energiedichte gleich, nämlich $\frac{1}{4} \rho \omega^2 A^2$, weil der Mittelwert von $\cos^2 x$ gleich $\frac{1}{2}$ ist. Damit wird die über die Periode gemittelte Energiedichte:

$$\frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

Dann betrachten wir einen Quader mit dem Volumen $\Delta V = dl dy ds$, dessen Querschnitt $dl dy$ senkrecht zum Strahlbündel steht und dessen Länge ds gerade 1 Wellenlänge $\beta 2\pi/\omega$ ist. Die in diesem Quader enthaltene Energie

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \Delta V = \pi \omega \beta A^2 dl dy$$

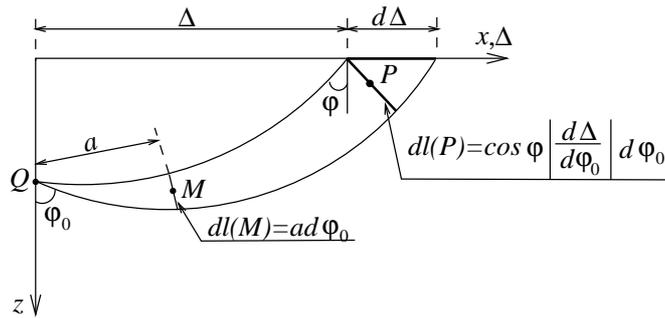
fließt pro Periode durch den Querschnitt $dl dy$ des Strahlbündels. Da keine Energie das Bündel verlässt, ist ΔE bei P genauso groß wie bei M . Hieraus folgt das gesuchte *Amplitudenverhältnis*:

$$\frac{A(P)}{A(M)} = \left[\frac{\rho(M)\beta(M)dl(M)}{\rho(P)\beta(P)dl(P)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.140)$$

Wie in (3.136), so kommt auch hier die Impedanzänderung entlang des Strahls vor. Die Wurzel aus der Querschnittsänderung des Strahlbündels ist aber die für die Amplitudenvariation entscheidende Größe. Im allgemeinsten dreidimensionalen Fall ist dl durch die Querschnittsfläche des dann dreidimensionalen Strahlbündels zu ersetzen.

Man kann (3.140) genähert berechnen, indem man hinreichend viele Strahlen durch das Medium mit den weiter oben besprochenen Methoden verfolgt und ihre Abstände ausmisst. Diese Methoden beruhen im wesentlichen auf der Lösung der Strahlgleichung (3.139), die auch als Gleichung des *kinematischen Ray-tracings* bezeichnet wird. Eine strenge Methode zur Berechnung von (3.140) basiert auf Differentialgleichungen, die direkt für den Querschnitt eines Strahlbündels gelten; sie heißen Gleichungen des *dynamischen Ray-tracings*. Ihre Ableitung würde hier zu weit führen; statt dessen sei auf das Buch von Červený, Molotov und Pšencík (1977) verwiesen.

Für Aufpunkte P auf einem Horizontalprofil, z.B. bei $z = 0$, ergibt eine Umformung von (3.140) noch etwas weitergehende Einsichten (vgl. die Skizze). Die Horizontalentfernung von P sei $\Delta(\varphi_0)$ mit dem Abstrahlwinkel φ_0 des Strahls von Q nach P bei Q .



Der Abstand des Referenzpunkts M von Q sei a . Mit den Angaben für $dl(M)$ und $dl(P)$ aus der Skizze folgt aus (3.140):

$$\frac{A(P)}{A(M)} = \left[\frac{\rho(M)\beta(M)}{\rho(P)\beta(P)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{a}{\cos \varphi \left| \frac{d\Delta}{d\varphi_0} \right|} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.141)$$

Aus diesem Ausdruck ersieht man, dass Probleme auftreten, wenn P auf oder in der Nachbarschaft von *Umkehrpunkten der Laufzeitkurve* auf dem Horizontalprofil liegt (vgl. z.B. die Laufzeitkurve unten auf S.83): dort ändern nämlich $d\Delta/d\varphi_0$ das Vorzeichen, und dies geschieht entweder mit stetigem oder unstetigem Durchgang durch eine Nullstelle. Im ersten Fall ergeben sich in P unendlich große Amplituden, im zweiten Fall sind sie unstetig; beides sind unbrauchbar. (3.141) bzw. (3.140) sind also nur in einiger Entfernung von Umkehrpunkten von Nutzen. Damit sind häufig die interessantesten Lagen des Aufpunkts ausgeschlossen.

Trotz dieses Nachteils sind die obigen Formeln (und ihre Entsprechungen im dreidimensionalen Fall) von einigem Nutzen bei seismologischen Anwendungen. Man kann sie auch so erweitern, dass Brechung und Reflexion an Diskontinuitäten berücksichtigt sind. Das erfordert die Berechnung der Querschnittsänderung des Strahlbündels an Diskontinuitäten und den Einbau von Reflexions- und Brechkoeffizienten.

Ein weiterer Nachteil der Energie-Überlegungen dieses Abschnitts ist, dass sie nur die Amplituden eines seismischen Strahls ergeben und keine Information über Phasenänderungen liefern, die zusätzlich zu den laufzeitbedingten Phasenänderungen sind. Nicht immer reicht es, zu (3.140) bzw. (3.141) nur noch den Term $\exp[i\omega(t - T)]$ hinzuzufügen, z.B. auf rücklaufenden Laufzeitästen im Fall, dass die Geschwindigkeit nur eine Funktion von z ist.

Im folgenden Abschnitt wird für vertikal inhomogene Medien eine Theorie dargestellt, die die Nachteile der hier benutzten Methode vermeidet; sie enthält wieder mehr wellenseismische Elemente.

Übung 3.15:

Man führe im Falle eines vertikal inhomogenen Mediums in die Amplitudenformel (3.141) statt des Abstrahlwinkels φ_0 des Strahlparameter q ein und benutze dann (3.127). Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Amplituden und der Laufzeitkurve $T(\Delta)$?

3.10 Totalreflexion an einem vertikal inhomogenen Medium

Harmonische Anregung und Reflexionskoeffizient

Wir betrachten ein Medium, dessen Geschwindigkeit $\beta(z)$ für $z \leq 0$ gleich $\beta(0)$, also konstant, und für $z > 0$ eine beliebige *stetige* Funktion von z ist. Diskontinuitäten sollen also nicht vorkommen. Eine ebene *SH*-Welle laufe im Halbraum $z < 0$ nicht vertikal wie im Beispiel aus S.85 sondern schräg mit der horizontalen Wellenzahl $k = \omega \sin \varphi / \beta(0)$ bzw. mit dem Strahlparameter $q = \sin \varphi / \beta(0)$ ($\varphi =$ Einfallswinkel). Dann legt die Strahlenseismik des vertikal inhomogenen Mediums (vgl. S.82f.) nahe, in der Eikonalgleichung (3.131) $\partial T / \partial x = q = \text{const}$ zu setzen (vgl. 3.127). Das ergibt

$$T(x, z) = qx + \int_0^z [\beta^{-2}(\zeta) - q^2]^{\frac{1}{2}} d\zeta$$

und damit die *Laufzeit der S-Wellenfront* vom Durchgang durch den Ursprung bis zum Durchgang durch den Punkt (x, z) . Die weitere Behandlung geht wie auf S.85 vor sich und führt auf:

$$v_0(x, z, t) = A(0) \left[\frac{\mu(0)s(0)}{\mu(z)s(z)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[i\omega \left(t - qx - \int_0^z s(\zeta) d\zeta \right) \right] \quad (3.142)$$

$$s(\zeta) = [\beta^{-2}(\zeta) - q^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.143)$$

q heißt horizontale und s vertikale *Langsamkeit* der Welle. Für $q=0$ ist (3.142) mit (3.136) identisch. (3.142) heißt *WKB*-Approximation der *SH*-Welle. Sie ist eine brauchbare Hochfrequenzapproximation, solange $\beta^{-1}(z) > q$ ist, d.h. solange der seismische Strahl, den wir der Welle zuordnen können, *nicht horizontal* verläuft. Wenn die Geschwindigkeit z.B. mit wachsender Tiefe abnimmt, oder aber, wenn sie zwar zunimmt, aber nirgendwo den Wert q^{-1} erreicht, ist (3.142) für *alle* z geeignet.

Der Fall, der uns hier vor allem interessiert, ist aber der, dass bei mit z wachsender Geschwindigkeit eine Tiefe z_s mit $\beta(z_s) = q^{-1}$ erreicht wird. In dieser Tiefe, in der der Strahl horizontal verläuft, divergiert (3.142): (3.129), (3.131) und (3.132) reichen *nicht* aus zur Beschreibung des Wellenfeldes im Bereich von Strahlscheiteln. Betrachtet man (3.142) für $z > z_s$ (mit $\beta(z) > \beta(z_s)$, d.h. die Geschwindigkeit nimmt weiter zu), so ergibt sich wieder ein sinnvolles Resultat: das Integral im Exponentialterm von z_s bis z ist imaginär und führt zu einer exponentiellen Abnahme der Amplituden mit wachsendem z . Unterhalb des Strahlscheitels klingt die *SH*-Welle also wie erwartet ab. Für $z < z_s$ ist das Wellenfeld mit (3.142) allein unvollständig beschrieben, denn (3.142) stellt

nur die nach unten laufende (*einfallende*) *SH*-Welle dar. Für die vom Strahlscheitel nach oben laufende (*reflektierte*) *SH*-Welle gilt ein ganz ähnliches Gesetz:

$$v_1(x, z, t) = RA(0) \left[\frac{\mu(0)s(0)}{\mu(z)s(z)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[i\omega \left(t - qx + \int_0^z s(\zeta) d\zeta \right) \right] \quad (3.144)$$

dass diese Welle nach oben läuft, folgt aus dem positiven Vorzeichen des Integrals im Exponentialterm. R ist, wie man durch die Wahl $z=0$ in (3.142) und (3.144) erkennt, das Amplitudenverhältnis $v_1(x, 0, t)/v_0(x, 0, t)$ von reflektierter und einfallender Welle und damit der *Reflexionskoeffizient des inhomogenen Halbraums* $z>0$. Seine Bestimmung erfordert eine quantitative Verknüpfung des gesamten Feldes $v_0 + v_1$ für $z < z_s$ mit dem erwähnten exponentiell gedämpften Feld für $z > z_s$, die, wie gesagt, mit der bisher benutzten Hochfrequenzapproximation der Bewegungsgleichung nicht möglich ist.

Diese Verknüpfung ist aber möglich mit einer *anderen* Hochfrequenzapproximation von (3.128), nämlich einer Wellengleichung mit tiefenabhängiger Geschwindigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2(z)} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}(z)} V \end{aligned} \right\} \quad (3.145)$$

Auch diese Hochfrequenzapproximation gilt unter der Voraussetzung (3.134), wie man durch Einsetzen in (3.128) zeigen kann.

Für ebene Wellen folgt dann mit dem Ansatz

$$V(x, z, t) = B(z) \exp[i\omega(t - qx)]$$

aus (3.142) eine gewöhnliche Differentialgleichung für $B(z)$:

$$B''(z) + \omega^2 [\beta^{-2}(z) - q^2] B(z) = 0 \quad (3.146)$$

Man muss nun diese Gleichung für große ω lösen. (Die Lösungen von $B''(z) + \omega^2 f(z)B(z) = 0$ in der Nachbarschaft der Nullstellen von $f(z)$ und für große ω heißen allgemein *WKBJ-Lösungen*, nach Autoren, die sich mit diesem Thema beschäftigt haben - Wentzel, Kramers, Brillouin, Jeffreys). Für $z < z_s$ ergibt sich für v die bereits bekannte Superposition von (3.142) und (3.144) der einfallenden und der reflektierten Welle, und für $z > z_s$ die oben skizzierte exponentiell gedämpfte Lösung. Denn Fall, dass z in unmittelbarer Nähe von z_s liegen, müssen wir nun genauer betrachten. Wir approximieren den Koeffizienten $\omega^2 s^2(z)$ von $B(z)$ (mit $s(z)$ aus (3.143)) *linear* und erhalten mit $s^2(z_s) = 0$, $\beta(z_s) = q^{-1}$ und $\beta'(z_s) > 0$:

$$B''(z) - 2\omega^2 q^3 \beta'(z_s)(z - z_s)B(z) = 0 \quad (3.147)$$

Diese Gleichung lässt sich mit der Substitution

$$y(z) = [2\omega^2 q^3 \beta'(z_s)]^{\frac{1}{3}} (z - z_s) \quad (3.148)$$

auf die Differentialgleichung der *Airyfunktionen*,

$$C'''(y) - yC(y) = 0$$

zurückzuführen. Ihre für unsere Zwecke interessante Lösung $C(y) = Ai(y)$ ist im Anhang E auf S. 155 erwähnt und skizziert (mehr über Airyfunktionen findet man im auf S. 71 angegebenen Handbuch von Abramowitz und Stegun). Tiefen $z \ll z_s$ entsprechenden Argumenten $y \ll 0$ von $Ai(y)$. Aus der Skizze auf S. 157 schließt man dann: der Übergang von der oszillatorischen Lösung $B(z)$ von (3.147) für $z < z_s$ zur exponentiell gedämpften Lösung für $z > z_s$ geht *ohne Singularität* von sich. Das gilt dann auch für die Verschiebung v , im Gegensatz zu dem, was man aus (3.142) und (3.144) folgern würde.

Der oszillatorische Verlauf von $B(z)$ für $z < z_s$ bedeutet, dass einfallende Welle v_0 und Reflexion v_1 eine stehende Welle bilden mit Verschiebungsknoten in der Tiefe, die den Nullstellen der Airyfunktion entsprechen. Der *Reflexionskoeffizient* R in (3.144) wird nun so bestimmt, dass die Superposition von (3.142) und (3.144) *in ihrem z -abhängigen Teil* gerade mit dem Verlauf der Airyfunktion übereinstimmt. Dabei kann man wegen der Annahme hoher Frequenzen die asymptotische Form von $Ai(y)$ für betragsgroße negative y benutzen:

$$Ai(y) \simeq \pi^{-\frac{1}{2}} |y|^{-\frac{1}{4}} \sin \left(\frac{2}{3} |y|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.149)$$

Weiter ist für $z < z_s$:

$$v_0 + v_1 = A(0) \left[\frac{\mu(0)s(0)}{\mu(z)s(z)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[i\omega (t - qx - \int_0^{z_s} s d\zeta) \right] \cdot \left\{ \exp \left[i\omega \int_z^{z_s} s d\zeta \right] + R \exp \left[2i\omega \int_0^{z_s} s d\zeta \right] \cdot \exp \left[-i\omega \int_z^{z_s} s d\zeta \right] \right\} \quad (3.150)$$

Die z -Abhängigkeit von $v_0 + v_1$ wird durch die geschweifte Klammer bestimmt. Sie wird nun genähert berechnet. Mit der bereits bei (3.147) benutzten Näherung $\omega^2 s^2(\zeta) = 2\omega^2 q^3 \beta'(z_s)(z_s - \zeta)$ folgt

$$\begin{aligned} \omega \int_z^{z_s} s d\zeta &= \pm [2\omega^2 q^3 \beta'(z_s)]^{\frac{1}{2}} \int_z^{z_s} (z_s - \zeta)^{\frac{1}{2}} d\zeta \\ &= \pm [2\omega^2 q^3 \beta'(z_s)]^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} (z_s - z)^{\frac{3}{2}} \\ &= \pm \frac{2}{3} |y|^{\frac{3}{2}} \\ &= \pm Y \end{aligned}$$

mit $y = y(z)$ aus (3.148). Das positive (negative) Vorzeichen gilt für positive (negative) Frequenzen. Damit lautet die geschweifte Klammer in (3.150)

$$\{\dots\} = e^{\pm iY} + Z e^{\pm iY}$$

mit der Abkürzung

$$Z = R \exp \left[2i\omega \int_0^{z_s} s d\zeta \right]. \quad (3.151)$$

Versucht man $Z = \pm i$ für $\omega \gg 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \{\dots\} &= (1 \pm i)(\cos Y + \sin Y) = 2^{\frac{1}{2}} (1 \pm i) \sin \left(Y + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{1}{2}} (1 \pm i) \sin \left(\frac{2}{3} |y|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

und damit die gewünschte Übereinstimmung mit dem wesentlichen Term in (3.149). $Z = \pm i$ in (3.151) ergibt den *Reflexionskoeffizient in der WKBJ-Approximation*:

$$\left. \begin{aligned} R &= i \frac{\omega}{|\omega|} \exp \left[-2i\omega \int_0^{z_s} (\zeta) d\zeta \right] \\ s(\zeta) &= [\beta^{-2}(\zeta) - q^2]^{\frac{1}{2}} \\ \beta(z_s) &= q^{-1} = \frac{\beta(0)}{\sin \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.152)$$

Sein Betrag ist 1 (*Totalreflexion*), er beschreibt nur *Phasenverschiebungen*. Zu der laufzeitbedingten Phasenverschiebung im Exponentialterm von R kommt noch eine konstante Phasenverschiebung $\pm\pi/2$ für $\omega \gg 0$ hinzu. Vergleicht man mit den Reflexionskoeffizienten geschichteter Medien, die wir früher ohne jede Approximation abgeleitet haben, so sieht man, dass die Form (3.152) eine *einfache* ist. Sie gilt nur für hinreichend hohe Frequenzen (Bedingung (3.134)) und für Einfallswinkel φ mit Totalreflexion. Reflexionskoeffizienten vom Typ (3.152) sind von einiger

praktischer Bedeutung für die Seismologie, mehr noch aber für die Untersuchung der Schallausbreitung im Ozean oder der Radiowellenausbreitung in der Ionosphäre (vgl. z.B. die Bücher von Budden (1961) und von Tolstoy und Clay (1966)).

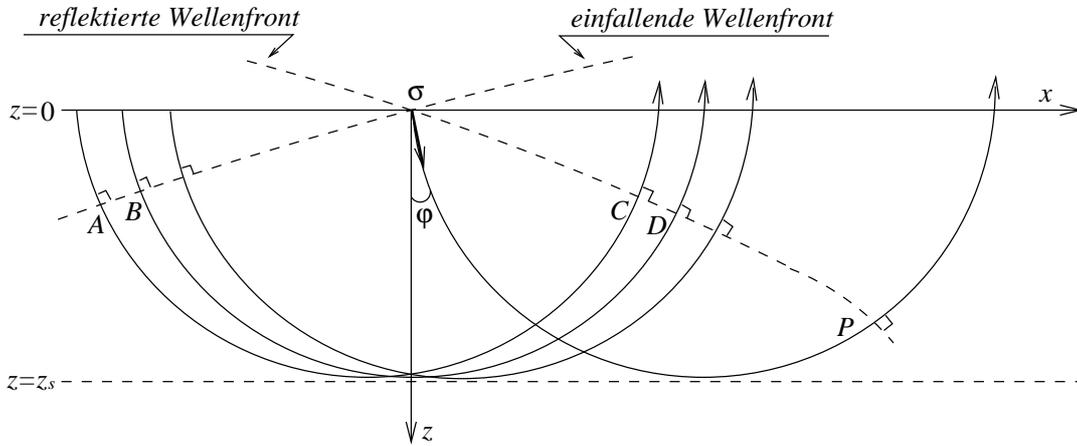
Die *reflektierte SH-Welle* am Ursprung folgt durch Einsetzen von (3.152) in (3.144):

$$v_1(0, 0, t) = A(0) i \frac{\omega}{|\omega|} \exp \left[i\omega \left(t - 2 \int_0^{z_s} s(\zeta) d\zeta \right) \right] \quad (3.153)$$

Die Größe

$$\tau(q) = 2 \int_0^{z_s} s(\zeta) d\zeta$$

heißt *Verzögerungszeit* und gibt die Zeitdifferenz zwischen den Durchgängen von einfallender und reflektierter Welle durch den Ursprung an.



Diese Zeitdifferenz entspricht (vgl. die Skizze) z.B. den Strahlsegmenten AC , BD , oder OP . Man beachte, dass die Wellenfronten für $z > 0$ *gekrümmt* sind; nur im homogenen Bereich $z < 0$ sind sie eben.

Die Skizze veranschaulicht auch, dass die Linie $z = z_s$ die Einhüllende sämtlicher Strahlen des Problems ist. Solche Hüllkurven (oder Hüllflächen) heißen *Kaustiken* (Brennlinien, Brennflächen) und sind durch besondere Energie-Konzentration charakterisiert; im Rahmen der Amplituden-Näherungsformel (3.140) würden sich für einen Punkt P direkt auf der Kaustik $z = z_s$ unendlich große Amplituden ergeben wegen $dl(P)=0$. Die oben gefundene zusätzliche Phasenverschiebung von $\pm \frac{\pi}{2}$ kann man *physikalisch* interpretieren als Folge der starken Wechselwirkung jedes Strahls mit seinen Nachbarstrahlen im Bereich der Kaustik. Kompliziertere Kaustiken als hier treten in vertikal inhomogenen Medien auf, wenn die anregende Welle von einer Punkt- oder Linienquelle herrührt. Auch in solchen Fällen ist die Phasenverschiebung pro Kaustikberührung eines Strahls mit guter Näherung $\pm \frac{\pi}{2}$. Noch kompliziertere Kaustiken gibt es in zwei- und dreidimensional inhomogenen Medien.

Impulsanregung und WKBJ-Seismogramme

Fällt nun statt der zeitlich harmonischen Welle eine *impulsive Welle* ein, die am Ursprung die Verschiebung $v_0(0, 0, t) = F(t)$ erzeugt, so folgt aus (3.153), dass die zugehörige Reflexion die zeitverschobene Hilbert-Transformierte von $F(t)$ ist (vgl. S.53):

$$v_1(0, 0, t) = F_H(t - \tau(q)) \quad (3.154)$$

Dieses Ergebnis besagt, dass die Reflexion für *alle* Einfallswinkel φ (bzw. Strahlparameter oder horizontale Langsamkeiten q) bis auf die Zeitverschiebung $\tau(q)$ gleich aussieht, und weicht damit von den Ergebnissen für eine Diskontinuität 1. Ordnung auf S.54 ab (dort traten bei Totalreflexion noch Änderungen der Impulsform mit φ auf).

Beim Übergang von ebenen Wellen zu *Zylinderwellen* benutzt man das Prinzip der Überlagerung. Man stellt die Zylinderwelle, die von einer isotrop strahlenden Linienquelle im Ursprung ausgehen soll, durch viele ebene Wellen mit Abstrahlwinkeln φ von 0 bis $\pi/2$, entsprechend positiven Werten von q , dar und superponiert analog die Reflexionen. Zunächst verallgemeinert man dazu (3.154) für beliebige $x > 0$:

$$v_1(x, 0, t) = F_H(t - \tau(q) - qx) = F_H(t) * \delta(t - \tau(q) - qx)$$

Dann integriert man diese ebenen Wellen über φ von 0 bis $\pi/2$ und erhält so das *WKBJ-Seismogramm* in der Entfernung x von der Linienquelle:

$$v_1(x, 0, t) = F_H(t) * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta(t - \tau(q) - qx) d\varphi = F_H(t) * I(x, t) \quad (3.155)$$

Das *Impuls-Seismogramm* $I(x, t)$ lässt sich numerisch relativ einfach berechnen:

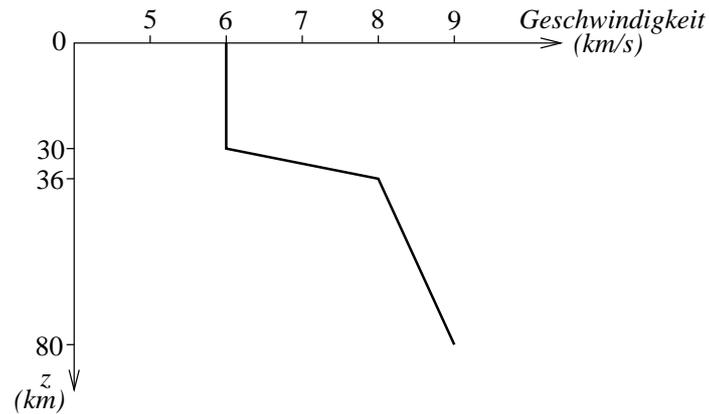
$$\left. \begin{aligned} I(x, t) &= \sum_i \delta(t - t_i) \Delta\varphi_i \\ t_i &= \tau(q_i) + q_i x, \quad q_i = \frac{\sin \varphi_i}{\beta(0)} \end{aligned} \right\} \quad (3.156)$$

Normalerweise macht man die φ_i gleichabständig ($\Delta\varphi_i = \Delta\varphi = \text{const}$). Die Deltafunktionen werden von den Zeitpunkten t_i auf die jeweils unmittelbar benachbarte Stützstelle von $I(x, t)$ geschoben und häufen sich dort gegebenenfalls an; de facto stehen in einer diskretisierten Version von $I(x, t)$ dort Vielfache von $\Delta\varphi$. $I(x, t)$ wird dann als Ganzes mit $F_H(t)$ gefaltet. Am aufwendigsten ist die Berechnung der Verzögerungszeit $\tau(q_i)$; hierfür gibt es aber effektive strahlenseismische Methoden. Im Vergleich zur Reflektivitätsmethode und auch zur generalisierten Strahlentheorie ist die Methode der WKBJ-Seismogramme ganz erheblich schneller. Es gibt auch andere numerische Realisierungen dieser Methode als (3.155) und (3.156).

WKBJ-Seismogramme haben wegen der Überlagerung vieler ebener Wellen *andere Phasenbeziehungen bzw. Impulsformen*, als man auf Grund von (3.152) bzw. (3.154) erwarten würde. Vorlaufende Laufzeitäste (vgl. S.83) weisen gar keine Phasenverschiebung auf, d.h., man erhält dort die Impulsform der anregende Zylinderwelle; Phasenverschiebungen und Impulsverformungen sind auf rücklaufende Laufzeitäste beschränkt. Außerdem sind die Seismogramm-Amplituden im Bereich der Umkehrpunkte von Laufzeitkurven regulär.

WKBJ-Seismogramme für ein einfaches Kruste-Mantel-Modell und eine Linienquelle an der Erdoberfläche sind im folgenden Bild zu sehen. Die Rechnung wurde mit einem Programm für *SH*-Wellen durchgeführt, obwohl das Geschwindigkeitsmodell für *P*-Wellen gilt; eine *P*-Wellen-Rechnung würde prinzipiell dasselbe ergeben. Der Laufzeitast der Reflexion $P_M P$ von der Kruste-Mantel-Grenze ist rücklaufend und der der refraktierten Welle P_n aus dem obersten Mantel vorlaufend.

not found!



Die Impulsformen dieser Wellen sind wie erwartet: P_n hat die Form der von der Quelle abgestrahlten Welle, während $P_M P$ etwa wie die Hilbert-Transformierte dazu aussieht.

In Entfernungen, die kleiner als die kritische Entfernung (ca. 100km) sind, nehmen die Amplituden stark ab. Am kritischen Punkt selbst, der auf einer schräg durch die Erdkruste laufenden Kaustik liegt, bleibt das Wellenfeld regulär.

Bei seismologischen Anwendungen von WKBJ-Seismogrammen sollte man immer ihren Näherungscharakter bedenken, der durch die Hochfrequenzform (3.152) des Reflexionskoeffizienten bedingt ist. Diese ist für Bereiche der Erde nicht ausreichend, in denen die Wellengeschwindigkeiten und die Dichte sich schnell mit der Tiefe ändern (z.B. an der Kern-Mantel-Grenze oder an der Grenze des inneren Kerns).

Kapitel 4

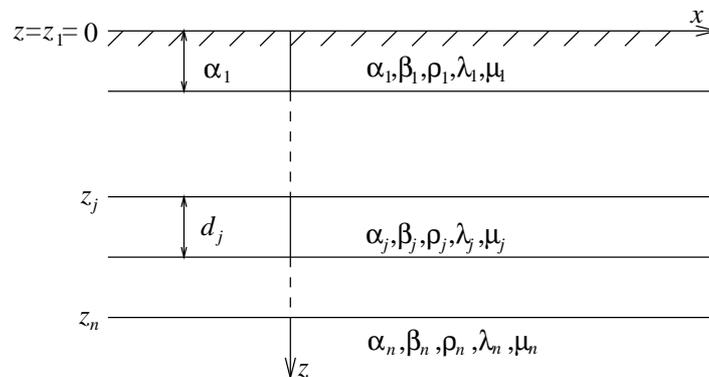
Oberflächenwellen

4.1 Freie Oberflächenwellen in geschichteten Medien

4.1.1 Grundgleichungen

Neben den Raumwellen, die bis zu beliebigen Punkten in der Erde vordringen können, gilt es auch Wellen, die auf die Nachbarschaft der Erdoberfläche beschränkt sind: *Oberflächenwellen*. Sie laufen der Erdoberfläche entlang, und ihre Amplituden sind nur in einem Tiefenbereich von der Größenordnung weniger Wellenlängen wesentlich von Null verschieden. Darunter gilt es praktisch keine Verschiebung. Wegen dieser Beschränkung auf die Nähe der Erdoberfläche ist die *Amplitudenabnahme* mit der Entfernung vom Anregungsort geringer als bei Raumwellen, die sich dreidimensional ausbreiten. Daher sind die Oberflächenwellen zumeist die dominierenden Erscheinungen in den Registrierungen von Erdbebenstationen. Eine weitere markante Eigenschaft ist ihre *Dispersion*, d.h. sie haben eine frequenzabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit, so dass in den entsprechenden Wellengruppen im Seismogramm die Frequenz mit der Zeit variiert (vgl. die Beobachtungsbeispiele auf S. 106).

In diesem kurzen Überblick haben wir Beobachtungen und Erklärung bereits zusammengefasst. Das Verdienst der ersten Erforscher der Oberflächenwellen (Rayleigh, Lamb, Love, Stoneley u.a.) ist es, die theoretischen Ansätze gefunden zu haben, mit denen die wesentlichen Beobachtungen erklärt werden können. Der Kernpunkt dieser Ansätze ist die Formulierung als *Eigenwertproblem* unter *Vernachlässigung der Quelle der elastischen Wellen*. Im einzelnen bedeutet dies folgendes. Wir betrachten einen geschichteten Halbraum mit Parametern wie in der Skizze; seine Oberfläche sei frei.



Wir arbeiten mit kartesischen Koordinaten x, y, z und nehmen *Unabhängigkeit von y* an. Dann können wir alle Gleichungen aus Abschnitt 3.6.2 übernehmen, die dort zur Vorbereitung der Untersuchung von Reflexion und Brechung zusammengestellt worden waren. Ebenso gilt auch hier die Unterscheidung von P -, SV - und SH -Anteilen der Verschiebung und die Tatsache, dass P - SV -Anteile einerseits und SH -Anteile andererseits sich unabhängig voneinander ausbreiten. Oberflächenwellen vom P - SV -Typ heißen *Rayleighwellen*. Sie sind in der x - z -Ebene polarisiert:

$$\begin{aligned} \text{Horizontalverschiebung } u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \text{Vertikalverschiebung } w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Potentiale Φ und Ψ in jeder Schicht erfüllen Wellengleichungen:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

Oberflächenwellen vom SH -Typ heißen *Lovewellen*. Sie sind in y -Richtung polarisiert, und für die Verschiebung v in jeder Schicht gilt ebenfalls eine Wellengleichung:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Die Randbedingungen sind auf S.47 angegeben.

Die *Ansätze* für Φ_j, Ψ_j und v_j in der j -ten Schicht des Modells lauten bei zeitlich harmonischen Verlauf ($\omega > 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_j \\ \Psi_j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} A_j(z) \\ B_j(z) \end{array} \right\} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = \left\{ \begin{array}{l} A_j(z) \\ B_j(z) \end{array} \right\} \exp [i(\omega t - kx)] \quad (4.4)$$

und

$$v_j = C_j(z) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = C_j(z) \exp [i(\omega t - kx)]. \quad (4.5)$$

Wir fragen dann: Unter welche Umständen gibt es eine ebene Welle, die sich in x -Richtung mit der *Phasengeschwindigkeit* c ausbreitet, wobei c in allen Schichten gleich ist? Wie groß ist c ? Gibt es Funktionen $A_j(z), B_j(z)$ und $C_j(z)$ derart, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{l} A_n(z) \\ B_n(z) \\ C_n(z) \end{array} \right\} = 0 \quad (4.6)$$

ist?

Das so gestellte Problem ist ein *Eigenwertproblem* und c bzw. die Wellenzahl $k = \omega/c$ sein *Eigenwert*. In vielen Fällen gibt es (bei festem ω) eine endliche Anzahl (>1) von Eigenwerten. Das Problem ist vergleichbar mit dem Problem, die Frequenzen der *Eigenschwingungen* (oder freien Schwingungen) von begrenzten Körper (Balken, Platten, Kugel etc.) zu bestimmen (vgl. Übung 4.1.1).

Uns interessiert nur der Fall, dass die Eigenwerte reell (>0) sind. Er hat die größte praktische Bedeutung. Die entsprechenden Oberflächenwellen heißen *Normalmoden* (engl. normal modes). Es gibt aber auch Wellen, die sich mit komplexen k beschreiben lassen: $k = k_1 - ik_2$ ($k_{1,2} > 0$). Diese Oberflächenwellen heißen *verlustbehaftete Moden* (engl. leaking modes), weil ihre Amplitude in Ausbreitungsrichtung abnimmt, und zwar exponentiell gemäß $\exp(-k_2 x)$. Ihre Phasengeschwindigkeit ist ω/k_1 .

Der Ansatz mit ebenen Wellen vernachlässigt den Einfluss der Anregung. Das ergibt eine starke Vereinfachung des Problems. Solche Oberflächenwellen heißen *frei* im Gegensatz zu *erzwungenen* Oberflächenwellen, die durch definierte Quellen angeregt werden. Auch in Bezug auf die Anregung ist die Analogie zu den (freien bzw. erzwungenen) Schwingungen begrenzter Körper hilfreich.

Die Behandlung freier Oberflächenwellen ist eine wichtige Voraussetzung für die Untersuchung erzwungener Oberflächenwellen (vgl. Abschnitt 4.2). Es wird sich zeigen, dass die dispersiven Eigenschaften beider Wellentypen gleich sind. Da diese Eigenschaften von der Schichtung des Mediums abhängen, lassen sie sich zu *Rückschlüssen* auf das Medium gebrauchen. Daher ist die Untersuchung der Dispersion freier Oberflächenwellen von großer praktischer Bedeutung.

Übung 4.1:

Die Radialschwingungen einer flüssigen Kugel mit P -Geschwindigkeit α werden durch das Potential $\Phi_n(r, t) \sim (e^{i\omega n t}/r) \cdot \sin(\omega_n r/\alpha)$ beschrieben ($n=1,2,3,\dots$). Man bestimme die Eigenfrequenzen ω_n aus der Bedingung, dass die Kugeloberfläche $r=R$ spannungsfrei ist (p_{rr} aus Übung 3.4), und gebe die Radialverschiebung an W_0 liegen Knotenflächen?

4.1.2 Rayleightwellen an der Oberfläche eines homogenen Halbraums

Der Halbraum ($z > 0$) habe die Geschwindigkeiten α und β für P - bzw. S -Wellen. Wir setzen die Ansätze

$$\Phi = A(z) \exp[i(\omega t - kx)] \quad \text{und} \quad \Psi = B(z) \exp[i(\omega t - kx)] \quad (4.7)$$

in die Wellengleichungen (4.2) mit $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ ein und erhalten so Differentialgleichungen für $A(z)$ und $B(z)$. Zum Beispiel ergibt sich für $A(z)$

$$A''(z) + k^2 \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right) A(z) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$A(z) = A_1 e^{-ik\delta z} + A_2 e^{ik\delta z} \quad \text{mit} \quad \delta = \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen (4.6) muss δ rein imaginär sein, z.B. negativ imaginär. Dann muss $A_2 = 0$ sein. Aus den Eigenschaften von δ folgt bereits eine Aussage über die Phasengeschwindigkeit der Rayleightwelle: $c < \alpha$. Es gilt also

$$A(z) = A_1 e^{-ik\delta z},$$

und analog erhält man

$$B(z) = B_1 e^{-ik\delta z}$$

mit $\gamma = (c^2/\beta^2)^{1/2}$ (negativ imaginär). Hierdurch wird c weiter eingeschränkt: $c < \beta$.

Die Potentialansätze (4.7) lauten also jetzt:

$$\Phi = A_1 \exp[i(\omega t - kx - k\delta z)], \quad \Psi = B_1 \exp[i(\omega t - kx - k\gamma z)] \quad (4.8)$$

Setzt man sie in die *Randbedingungen* $p_{zz} = p_{xx} = 0$ für $z=0$ mit p_{zz} und p_{zx} aus (3.29) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{\alpha^2} \frac{\lambda}{\mu} A_1 + 2(-k^2 \delta^2 A_1 - k^2 \gamma B_1) &= 0 \\ -2k^2 \delta A_1 + (-k^2 + k^2 \gamma^2) B_1 &= 0 \end{aligned}$$

Division durch $-k^2$ und Verwendung von $\lambda/\mu = (\alpha^2 - 2\beta^2)/\beta^2$ liefert:

$$\begin{aligned} \left[\frac{c^2}{\alpha^2} \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\beta^2} + 2 \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right) \right] A_1 + 2\gamma B_1 &= 0 \\ 2\delta A_1 + \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2} \right) B_1 &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2\right) A_1 + 2\gamma B_1 &= 0 \\ -2\delta A_1 + \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2\right) B_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Dieses Gleichungssystem hat nur dann nichttriviale Lösungen A_1 und B_1 , wenn seine Determinante verschwindet. Das ergibt eine Bestimmungsgleichung für c :

$$\left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2\right)^2 + 4\delta\gamma = 0$$

Im uns interessierenden Bereich $0 < c < \beta$ ist

$$\left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2\right)^2 = 4 \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quadriert ergibt

$$\frac{c^2}{\beta^2} \left[\frac{c^6}{\beta^6} - 8\frac{c^4}{\beta^4} + \left(24 - 16\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \frac{c^2}{\beta^2} - 16 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \right] = 0. \quad (4.10)$$

Die Lösung $c = 0$ ist nicht von physikalischem Interesse, daher brauchen wir nur die eckige Klammer zu untersuchen. Für $c = 0$ ist sie negativ und für $c = \beta$ positiv. Daher gibt es zwischen 0 und β tatsächlich (mindestens) eine reelle Lösung von (4.10). Das Eigenwertproblem hat also eine Lösung - entlang der Oberfläche eines homogenen Halbraums kann eine Welle laufen, deren Amplituden mit der Tiefe abklingen. In diesem einfachen Fall liegt *keine Dispersion* vor: c ist unabhängig von ω .

Im Sonderfall $\lambda = \mu$ (also $\alpha = \beta\sqrt{3}$) gilt $c = 0,92\beta$. Ganz allgemein ist die Rayleighwelle nur wenig langsamer als die S -Welle.

Wir untersuchen noch die *Verschiebungen* der Rayleighwelle:

$$u = (-ikA_1 e^{-ik\delta z} + ik\gamma B_1 e^{-ik\gamma z}) \exp[i(\omega t - kx)]$$

Mit $\gamma B_1 = -(c^2/2\beta^2 - 1) A_1$ (aus (4.9)) wird

$$\begin{aligned} u &= -ikA_1 \left[e^{-ik\delta z} + \left(\frac{c^2}{2\beta^2} - 1\right) e^{-ik\gamma z} \right] \exp[i(\omega t - kx)]. \\ e^{-ik\delta z} + \left(\frac{c^2}{2\beta^2} - 1\right) e^{-ik\gamma z} &= a(z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Analog ist

$$w = (-ik\delta A_1 e^{-ik\delta z} - ikB_1 e^{-ik\gamma z}) \exp[i(\omega t - kx)].$$

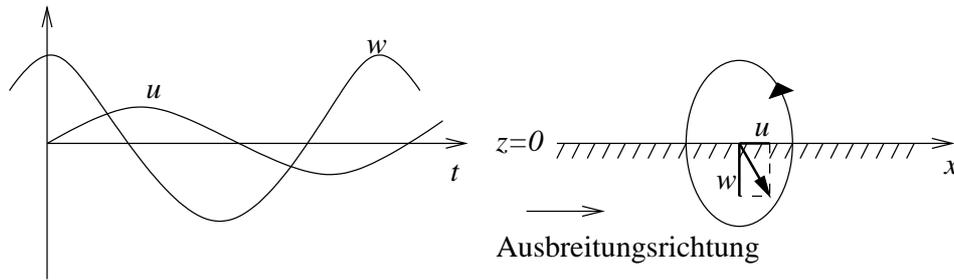
Mit $B_1 = \delta A_1 (c^2/2\beta^2 - 1)^{-1}$ (aus (4.9)) erhält man

$$\begin{aligned} w &= -ik\delta A_1 \left[e^{-ik\delta z} + \left(\frac{c^2}{2\beta^2} - 1\right)^{-1} e^{-ik\gamma z} \right] \exp[i(\omega t - kx)]. \\ e^{-ik\delta z} + \left(\frac{c^2}{2\beta^2} - 1\right)^{-1} e^{-ik\gamma z} &= b(z) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Wir nehmen an, dass A_1 positiv reell ist, und gehen zu den Realteilen von (4.11) und (4.12) über:

$$\begin{aligned} u &= kA_1 a(z) \sin(\omega t - kx) \\ w &= -|\delta|kA_1 b(z) \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Für $z=0$ gilt $a(0)>0$ und $b(0)<0$. In diesem Fall sehen u und w als Funktionen der Zeit etwa wie folgt aus:



Der Verschiebungsvektor beschreibt eine *Ellipse*, die *retrograd* durchlaufen wird.

Für hinreichend große z dominiert wegen $|\gamma| < |\delta|$ in $a(z)$ und $b(z)$ der zweite Term, so dass dort beide Funktionen negativ sind. Der Verschiebungsvektor beschreibt wieder eine Ellipse, die aber nun *prograd* durchlaufen wird. Der Übergang von retrograder zu prograder Durchlaufrichtung erfolgt in der Tiefe, wo $a(z)=0$ ist. Für $\lambda = \mu$ ist das etwa für $z = 0,2\Lambda$ der Fall, wobei $\Lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/k$ die Wellenlänge ist. Diese Tiefe bildet eine *Knotenfläche der Horizontalverschiebung*.

Elliptische Polarisation des Verschiebungsvektors und die Existenz von Knotenfläche der Verschiebungskomponenten sind auch Charakteristika von freien Rayleighwellen in *geschichteten* Medien. Bei diesen kommt als wichtigstes Merkmal noch die Dispersion hinzu.

Auf S.4.1.2 sind *theoretische Seismogramme* für eine Explosions-Punktquelle in einem homogenen Halbraum und Beobachtungspunkte auf seiner Oberfläche wiedergegeben (Rechnung mit der exakten Strahlentheorie für Punktquellen, vgl. Abschnitt 3.8).

not found!

Die Rayleighwelle ist also eine erzwungene. Die Pfeile an den Seismogrammen geben die theoretischen Einsatzzeiten r/c wieder, wo c die Phasengeschwindigkeit der freien Rayleighwelle ist. Der auf S. 99 angegebene Hodograph eines Punktes der Oberfläche, also dessen Bahnkurve beim Durchgang der Rayleighwelle, hat grob elliptische Form. Die Resultate der Theorie der freien Rayleighwelle werden also recht gut bestätigt.

Übung 4.2:

Gilt es beim homogenen Halbraum freien Lovewellen?

4.1.3 Lovewellen an der Oberfläche eines geschichteten Halbraums

Matrizenformalismus und Modenbegriff

Als Beispiel für Oberflächenwellen in geschichteten Medien behandeln wir *Lovewellen*, also Oberflächenwellen vom *SH*-Typ. Wir diskutieren zunächst den allgemeinen Fall beliebig vieler Schichten und geben hierzu das numerische Verfahren an, mit dem die *Dispersionsbeziehungen* $c = c(\omega)$

oder $k = k(\omega)$ berechnet werden können. Dann besprechen wir den Fall einer Schicht auf einem Halbraum näher.

Wir gehen von den Grundgleichung in Abschnitt 4.1.1 aus und setzen den Ansatz (4.5) für Lovewellen in die Wellengleichung (4.3) für die Verschiebung in y -Richtung ein. Auf diese Weise erhalten wir in Analogie zu (4.8)

$$v_j = D_j \exp[i(\omega t - kx + k\gamma_j(z - z_j))] + E_j \exp[i(\omega t - kx - k\gamma_j(z - z_j))], \quad (4.13)$$

wo D_j und E_j nun Konstanten sind und

$$\gamma_j = \left(\frac{c^2}{\beta_j^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Wir vereinbaren, dass γ_j positiv reell oder negativ imaginär sein soll, je nachdem, ob sein Radikand positiv oder negativ ist. Im Halbraum ($j = n$) muss dann wegen (4.6) γ_n negativ imaginär, also $c < \beta_n$, und

$$D_n = 0 \quad (4.14)$$

sein.

Die Randbedingungen fordern für $z = z_1, z_2, \dots, z_n$ Stetigkeit der Tangentialspannung $\mu \partial v / \partial z$ und für $z = z_2, z_3, \dots, z_n$ auch noch Stetigkeit der Verschiebung v . Aus $\partial v_1 / \partial z = 0$ für $z = z_1 = 0$ folgt

$$E_1 = D_1. \quad (4.15)$$

Für $z = z_j$ ($j \geq 2$) ergeben sich aus $v_j = v_{j-1}$ und $\mu_j \partial v_j / \partial z = \mu_{j-1} \partial v_{j-1} / \partial z$ folgende Gleichungen für D_j und E_j in Abhängigkeit von D_{j-1} und E_{j-1} :

$$\begin{aligned} D_j + E_j &= D_{j-1} e^{ik\gamma_{j-1}d_{j-1}} + E_{j-1} e^{-ik\gamma_{j-1}d_{j-1}} \\ D_j - E_j &= \frac{\mu_{j-1}\gamma_{j-1}}{\mu_j\gamma_j} [D_{j-1} e^{ik\gamma_{j-1}d_{j-1}} - E_{j-1} e^{-ik\gamma_{j-1}d_{j-1}}] \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 3.6.5 bietet sich hier eine Matrizenschreibweise an:

$$\begin{pmatrix} D_j \\ E_j \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{ik\gamma_{j-1}d_{j-1}} \begin{pmatrix} 1 + \eta_j & (1 - \eta_j) e^{-2ik\gamma_{j-1}d_{j-1}} \\ 1 - \eta_j & (1 + \eta_j) e^{-2ik\gamma_{j-1}d_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j-1} \\ E_{j-1} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

oder :

$$\begin{pmatrix} D_j \\ E_j \end{pmatrix} = \text{Schichtmatrix } \underline{m}_j \begin{pmatrix} D_{j-1} \\ E_{j-1} \end{pmatrix}$$

$$\eta_j = \frac{\mu_{j-1}\gamma_{j-1}}{\mu_j\gamma_j}$$

Sukzessive Anwendung von (4.16) führt auf

$$\begin{pmatrix} D_n \\ E_n \end{pmatrix} = \underline{m}_n \cdot \underline{m}_{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{m}_3 \cdot \underline{m}_2 \begin{pmatrix} D_1 \\ E_1 \end{pmatrix} = \underline{M} \begin{pmatrix} D_1 \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ E_1 \end{pmatrix}.$$

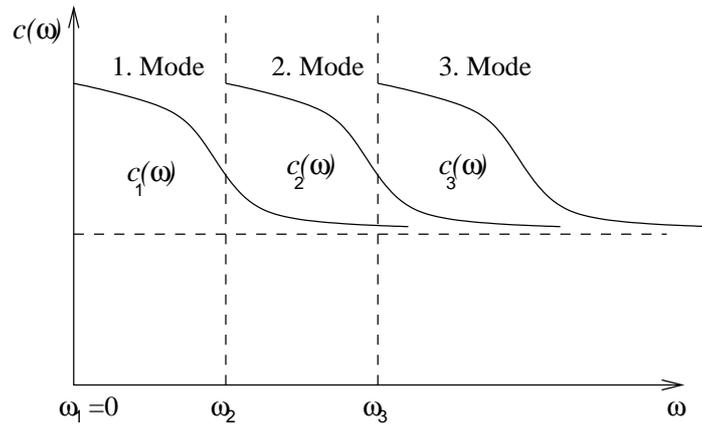
\underline{M} ist das Produkt der Schichtmatrizen.

Mit (4.14) und (4.15) ergibt sich die Bestimmungsgleichung für c oder k als Funktion von ω und den Schichtparametern (*Dispersions-Gleichung*),

$$M_{11} + M_{12} = 0. \quad (4.17)$$

Diese Gleichung muss normalerweise mit numerischen Methoden gelöst werden. Man gibt hierzu einen Wert von c aus dem in Frage kommenden Intervall von 0 bis β_n vor, berechnet $M_{11} + M_{12}$ über die Multiplikation der Schichtmatrizen als Funktion von ω im interessierenden Frequenzbereich

und bestimmt ihre Nullstellen. Dann variiert man c und bestimmt die entsprechend verschobenen Nullstellen erneut, usw.. Ob es überhaupt Nullstellen gibt, und wenn ja, wie sie liegen, hängt vom Verlauf der S -Geschwindigkeit und der Dichte mit der Tiefe ab. Jede Nullstelle liefert (s. Skizze) *einen Ast der Dispersionskurve der Phasengeschwindigkeit, $c_i(\omega)$* . Jeder Ast hat eine *untere Grenzfrequenz $\nu_i = \omega_i/2\pi$* (engl. cutoff frequency). Theoretische Dispersionskurven werden als Funktion der Frequenz, der Periode oder auch der Wellenzahl berechnet (im letzten Fall ist die Frequenz dann festgelegt), experimentelle Kurven sind zumeist Funktionen der Periode.



Das Wellengeschehen in dem Halbraum, das einem bestimmten Ast der Dispersionskurve entspricht, wird als *Mode* bezeichnet. Bei Lovewellen handelt es sich speziell um *Normalmoden* vom *SH*-Typ, die sich ungedämpft ausbreiten. Der Modenbegriff gilt auch für Rayleighwellen und für verlustbehaftete Oberflächenwellen. Man unterscheidet die Moden durch ihre Ordnung: 1.Mode, 2.Mode, usw..

Oft wird auch die 1.Mode als *Grund-* oder *Fundamentalmode* bezeichnet, und die Zählung (1.Mode, 2.Mode, usw.) beginnt erst danach. Außer durch ihre dispersiven Eigenschaften unterscheiden sich die Moden durch die Zahl ihrer *Knotenflächen*. Diese ist etwa (bis auf ± 1) gleich der Ordnung. Welche Moden in realen Situationen auftreten, hängt vom Frequenzbereich ab, in dem die Quelle abstrahlt, und von ihrer Tiefenlage (vgl. Abschnitt 4.2). Bei Erdbeben tragen zumeist nur wenige Moden, oft nur die Grundmode, zu den Oberflächenwellen bei. In der theoretischen Seismogramm-Montage auf S.69 bestehen die Lovewellen im wesentlichen aus der Grundmode.

Sonderfall $n=2$

Im Fall einer einzigen Schicht über einem Halbraum lautet die Dispersionsgleichung (4.17)

$$e^{-2ik\gamma_1 d_1} = \frac{\eta_2 + 1}{\eta_2 - 1} = \frac{\mu_1 \gamma_1 + \mu_2 \gamma_2}{\mu_1 \gamma_1 - \mu_2 \gamma_2} \quad (4.18)$$

mit $\gamma_{1,2} = (c^2/\beta_{1,2}^2 - 1)^{1/2}$. γ_2 ist negativ imaginär und $c < \beta_2$.

Ist $\beta_1 > \beta_2$, so ist auch γ_1 negativ imaginär. Dann ist die rechte Seite von (4.18) reell und größer als 1. Die linke Seite ist auch reell, aber kleiner als 1. Es gibt daher keine reelle Lösung c von (4.18) in diesem Fall.

Die S -Geschwindigkeit im Halbraum muss also größer als in der Schicht sein: $\beta_2 > \beta_1$. In diesem Fall können wir Werte von c zwischen 0 und β_1 mit derselben Argumentation wie bei $\beta_1 > \beta_2$ ausschließen. Es bleiben also Werte von c zwischen β_1 und β_2 übrig. In diesem Fall ist γ_1 positiv reell, und beide Seiten in (4.18) sind komplex. Der Betrag beider Seiten ist gleich 1. Daher ergibt die Gleichsetzung der Phasen die *Dispersionsgleichung der Lovewellen*:

$$-2k\gamma_1 d_1 = -2 \arctan \frac{\mu_2 |\gamma_2|}{\mu_1 \gamma_1}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\mu_2 (c^{-2} - \beta_2^{-2})^{\frac{1}{2}}}{\mu_1 (\beta_1^{-2} - c^{-2})^{\frac{1}{2}}} = \tan \left[\omega d_1 (\beta_1^{-2} - c^{-2})^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.19)$$

Diese transzendente Gleichung löst man durch Vorgabe von c mit $\beta_1 < C < \beta_2$ und Umkehrung des Tangens, woraus das zugehörige ω folgt (bzw. die zugehörigen ω). Für eine *allgemeine* Diskussion führen wir aber eine Variable x ein:

$$\left. \begin{aligned} x(c) &= \omega d_1 (\beta_1^{-2} - c^{-2})^{\frac{1}{2}} \\ c(x) &= \frac{\omega d_1}{\left(\frac{\omega^2 d_1^2}{\beta_1^2} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

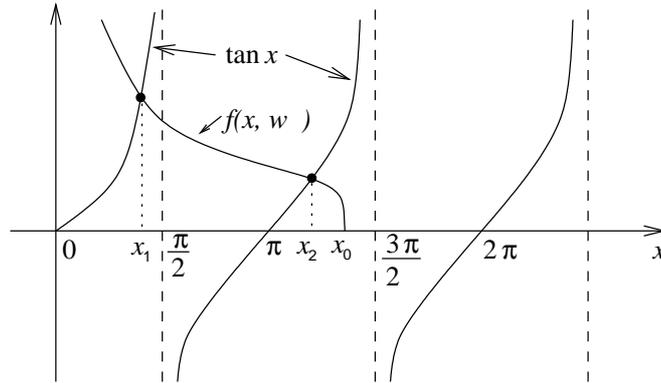
Damit wird die linke Seite von (4.19):

$$\frac{\mu_2 (c^{-2} - \beta_2^{-2})^{\frac{1}{2}}}{\mu_1 (\beta_1^{-2} - c^{-2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu_2}{\mu_1 x} [\omega^2 d_1^2 (\beta_1^{-2} - \beta_2^{-2}) - x^2]^{\frac{1}{2}} = f(x, \omega)$$

(4.19) lautet dann

$$f(x, \omega) = \tan x.$$

Veranschaulichung:



$f(x, \omega)$ ist zwischen $x=0$ und seiner Nullstelle

$$x_0 = \omega d_1 (\beta_1^{-2} - \beta_2^{-2})^{\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

reell. Diese Nullstelle wandert in Abhängigkeit von ω nach rechts und bewirkt, dass immer mehr Schnittpunkte von $f(x, \omega)$ und $\tan x$ entstehen. Der Schnittpunkt $x_i = x_i(\omega)$ ergibt, in $c(x)$ aus (4.20) eingesetzt, die *Dispersionsbeziehung der i -ten Mode* ($i = 1, 2, \dots$):

$$c_i(\omega) = \frac{\omega d_1}{\left(\frac{\omega^2 d_1^2}{\beta_1^2} - x_i^2(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.22)$$

Die i -te Mode tritt nur auf, wenn $x_0 > (i-1)\pi$ ist. Mit (4.21) ergibt sich hieraus ihre *untere Grenzfrequenz* zu

$$\nu_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{i-1}{2d_1 (\beta_1^{-2} - \beta_2^{-2})^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.23)$$

Die i -te Mode existiert nur für Frequenzen $\nu > \nu_i$, die erste Mode (Grundmode, $i=1$) gibt es immer.

Die Phasengeschwindigkeit jeder Mode bei ihrer unteren Grenzfrequenz ergibt sich am einfachsten aus der Tatsache, dass dort der Tangens in (4.19) verschwindet:

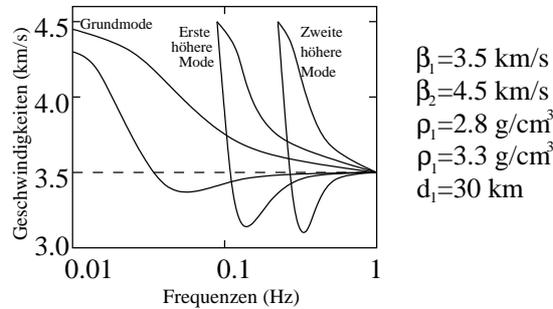
$$c_i(\omega_i) = \beta_2 \quad (4.24)$$

Für $\omega \rightarrow \infty$ geht $x_i \rightarrow (i - 1/2)\pi$ und der Tangens in (4.19) gegen ∞ . Daher muss

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_i(\omega) = \beta_1 \quad (4.25)$$

sein. Eine obere Grenzfrequenz gibt es nicht, und die Geschwindigkeiten von Schicht und Halbraum sind die Grenzwerte der Phasengeschwindigkeit.

Ein berechnetes Beispiel für die Dispersionskurven der drei ersten Love-Moden eines Kruste-Mantel-Modells, bestehend aus einem Halbraum mit einer Schicht darüber, ist nachstehend wiedergegeben.



Außer den Kurven für die Phasengeschwindigkeit c sind noch die für die *Gruppengeschwindigkeit*

$$U = \frac{d\omega}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} = c - \Lambda \frac{dc}{d\Lambda} = \frac{c}{1 - \frac{\omega}{c} \frac{dc}{d\omega}} = \frac{c}{1 + \frac{T}{c} \frac{dc}{dT}} \quad (4.26)$$

aufgenommen (Λ = Wellenlänge, T = Periode). Die Gruppengeschwindigkeit kontrolliert, wie wir noch im einzelnen sehen werden, die Ausbreitung eines Impulses von der Quelle zum Aufpunkt, d.h., jede Frequenz läuft von der Quelle zum Aufpunkt mit ihrer Gruppengeschwindigkeit, *nicht* mit ihrer Phasengeschwindigkeit. Aus Beobachtungen kann man sowohl die Phasen- als auch die Gruppengeschwindigkeit ableiten (s. Abschnitte 4.1.4 und 4.1.5). Somit kann man beide zur Interpretation benutzen.

Knotenflächen

Abschließend untersuchen wir noch die Knotenflächen der Love-Moden im soeben diskutierten Fall, also die Flächen, auf denen die Verschiebung verschwindet. Aus (4.13) folgt allgemein mit (4.14) und (4.15):

$$\begin{aligned} v_1 &= 2E_1 \cos(k\gamma_1 z) \exp[i(\omega t - kx)] && \text{(Schicht)} \\ v_2 &= E_2 \exp(-ik\gamma_2(z - d_1)) \exp[i(\omega t - kx)] && \text{(Halbraum)} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke gelten auch speziell für jede einzelne Mode, wobei deren Dispersionsbeziehung (4.22) einzusetzen ist; der Zusammenhang zwischen E_1 und E_2 ist $E_2 = 2E_1 \cos(k\gamma_1 d_1)$.

Man sieht, dass an der Oberfläche $z = 0$ immer ein *Schwingungsbauch* vorliegt und dass Knotenflächen nur in der Schicht, nicht im Halbraum, auftreten. Ihre Lage ist durch die Nullstellen der Kosinusfunktion bestimmt. Bei der i -ten Mode erhält man sie aus der Gleichung

$$k\gamma_1 z = \omega (\beta_1^{-2} - c_i^{-2})^{\frac{1}{2}} z = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots, N_i), \quad (4.27)$$

wo N_i ihre Anzahl ist, bestimmt durch $z \leq d_1$.

Für die untere Grenzfrequenz $\omega = \omega_i$ aus (4.23) ist wegen (4.24)

$$(i-1)\pi \frac{z}{d_1} = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

Das ist erfüllt für

$$z = \frac{2n-1}{2i-2}d_1 \text{ mit } n = 1, 2, \dots, N_i = i-1.$$

Für $\omega = \omega_i$ gibt es also $i-1$ Knotenflächen. Ihr Abstand ist

$$\Delta z = \frac{d_1}{i-1} \quad (i = 3, 4, \dots).$$

Die erste Mode ($i=1$) hat keine Knotenfläche, weder für $\omega = \omega_1 = 0$ noch für endliche $\omega > 0$.

Das andere Extrem in der Frequenzskala jeder Mode ist $\omega = \infty$. Aus der Diskussion des Verhaltens von $c_i(\omega)$ für $\omega \rightarrow \infty$ (siehe (4.25)) folgt

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega (\beta_1^{-2} - c_i^{-2})^{\frac{1}{2}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{x_i(\omega)}{d_1} = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{d_1}.$$

Gleichung (4.27) führt also nun darauf, dass man alle $z \leq d_1$ sucht, die der Beziehung

$$\left(i - \frac{1}{2}\right) \pi \frac{z}{d_1} = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

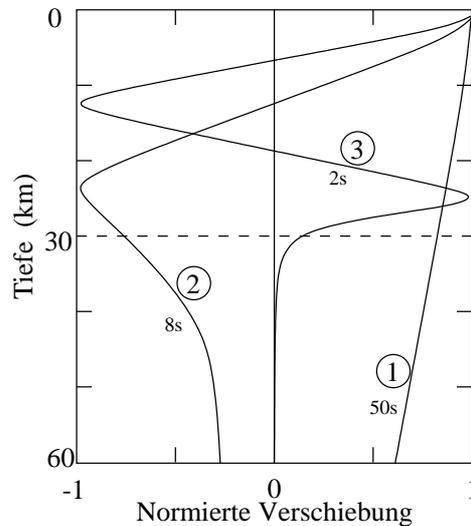
genügen. Das sind die Werte

$$z = \frac{2n-1}{2i-1}d_1 \text{ mit } n = 1, 2, \dots, N_i = i.$$

Für $\omega = \infty$ gibt es also i Knotenflächen mit dem Abstand

$$\Delta z = \frac{d_1}{i - \frac{1}{2}} \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Die Änderung gegenüber den Verhältnissen für $\omega = \omega_i$ besteht im Zusammenrücken der Knotenflächen, in einer allgemeinen Wanderung nach oben (zu kleineren Tiefen) und im Hinzutreten der i -ten Knotenfläche $z = d_1$. Letzteres bedeutet, dass für $\omega = \infty$ der Halbraum in Ruhe bleibt. Das Bild auf S.104 zeigt quantitativ den Amplitudenverlauf der ersten drei Moden mit der Tiefe in dem Kruste-Mantel-Modell, dessen Dispersionskurven auf S.103 angegeben wurden (die Periode ist jeweils vermerkt). Diese Amplitudenverteilungen werden auch als *Eigenfunktionen* der Moden bezeichnet.



Übung 4.3:

Man stelle die Dispersionsgleichung für freie Rayleighwellen in einem flüssigen Modell aus einer Schicht über einem Halbraum auf und vergleiche sie mit (4.19). Man zeichne eine Skizze ähnlich der auf S.102. Welcher Unterschied tritt speziell bei der ersten Moden auf?

4.1.4 Bestimmung der Phasengeschwindigkeit von Oberflächenwellen aus Beobachtungen

Im letzten Abschnitt haben wir u.a. gesehen, wie man die Phasengeschwindigkeit einer Love-Mode in einem geschichteten Halbraum berechnet, wenn dieser Halbraum gegeben ist. Auf ähnliche (allerdings kompliziertere) Weise kann man Rayleighwellen behandeln.

Hier interessiert uns nun die Ableitung der Phasengeschwindigkeit aus *Beobachtungen*. Wir nehmen an, dass nur *eine* Mode vorliegt. Ist das nicht der Fall, so muss mit *Filterverfahren* eine bestmögliche Trennung der auftretenden Moden erreicht werden. Das sind zum Teil komplizierte und aufwendige Methoden, die uns hier, wo es um das Grundsätzliche geht, nicht zu beschäftigen brauchen. Einen Überblick und Anwendungen findet man in dem Übersichtsartikel von D. Seidl und St. Müller: Seismische Oberflächenwellen, J. Geophys. 42, 283-328, 1977.

Wir rechnen mit ebenen Oberflächenwellen, vernachlässigen also die Anregung. Das so abgeleitete Verfahren zur Bestimmung der Phasengeschwindigkeit ist für praktische Anwendung genügend genau. Das *modale Seismogramm* irgendeiner Verschiebungskomponente an der Erdoberfläche lautet bei Ausbreitung der Mode in x -Richtung

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c(\omega)} \right) \right] d\omega \quad (4.28)$$

und stellt eine Superposition der bisher behandelten harmonischen Oberflächenwellen mit Hilfe des Fourierintegrals dar. $c(\omega)$ ist die Phasengeschwindigkeit der Mode und soll aus den Registrierungen von $u(x, t)$ abgeleitet werden. Da c frequenzabhängig ist, sind die Seismogramme für verschiedene x verschieden. $A(\omega)$ ist das Spektrum der Verschiebung an der (willkürlichen) Stelle $x=0$. Das Amplitudenspektrum ist $|A(\omega)|$, das Phasenspektrum $\Phi(\omega) = \arg A(\omega)$:

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\Phi(\omega)}$$

Wir nehmen an, dass $u(x, t)$ für $x = x_1$ und $x = x_2 > x_1$ bekannt ist, und machen eine Fourieranalyse dieser Seismogramme:

$$u(x_{1,2}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{1,2}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.29)$$

$G_{1,2}(\omega)$ ist das Spektrum des Seismogramms für $x = x_{1,2}$. Der Vergleich von (4.29) und (4.28) ergibt

$$G_{1,2}(\omega) = |G_{1,2}(\omega)| e^{i\varphi_{1,2}(\omega)} = A(\omega) \exp \left[-i\omega \frac{x_{1,2}}{c(\omega)} \right] = |A(\omega)| \exp \left[i \left(\Phi(\omega) - \omega \frac{x_{1,2}}{c(\omega)} \right) \right].$$

Wenn der Zeitpunkt $t=0$ für beide Seismogramme derselbe ist, und wenn man aus den numerisch bestimmten Phasen $\varphi_{1,2}(\omega)$, die normalerweise zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, eventuelle Sprünge um $\pm 2\pi$ entfernt hat, kann man die Phasen der linken und rechten Seite direkt gleich setzen:

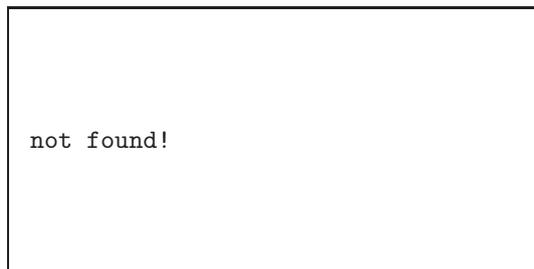
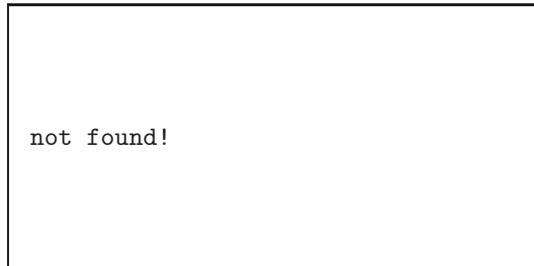
$$\varphi_{1,2}(\omega) = \Phi(\omega) - \omega \frac{x_{1,2}}{c(\omega)}$$

Bei der Differenzbildung von $\varphi_1(\omega)$ und $\varphi_2(\omega)$ fällt das unbekannte Phasenspektrum $\Phi(\omega)$ von $u(0, t)$ heraus, und man erhält folgendes Resultat für die Phasengeschwindigkeit:

$$c(\omega) = \frac{(x_2 - x_1)\omega}{\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)} \quad (4.30)$$

Für praktische Anwendungen der Methode in der beschriebenen Form müssen die Oberflächenwellen-Beobachtungen von zwei Stationen genommen werden, die mit dem Herd zusammen auf einem Großkreis der Erde liegen. Es macht aber keine Schwierigkeiten, diese Einschränkung zu umgehen, vorausgesetzt, man hat *drei* Stationen, die ein Dreieck bilden. In beiden Fällen sind die abgeleiteten Phasengeschwindigkeiten repräsentativ für den Bereich *zwischen* den Stationen.

Ein Beispiel für Seismogramme von Rayleighwellen ist nachstehend angegeben, zusammen mit einer Interpretation, die auf der Phasengeschwindigkeit beruht (entnommen aus der Arbeit von L. Knopoff, St. Müller und W.L. Pilant: Structure of the crust and upper mantle in the Alps from the phase velocity of Rayleigh waves, Bull. Seism. Soc. Am. 56, 1009-1044, 1966).



4.1.5 Die Gruppengeschwindigkeit

Dispergierte Seismogramme wie die auf S.106 haben häufig eine so langsame Variation der Frequenz mit der Zeit, dass man einem Zeitpunkt *eine* Frequenz zuordnen kann. Machen wir dies für zwei verschiedene Entfernungen x_1 und x_2 (auf einem Großkreis durch das Epizentrum), und sind die Zeiten, zu denen die Frequenz ω dort angetroffen wird, $t_1(\omega)$ und $t_2(\omega)$, so ist

$$U(\omega) = \frac{x_2 - x_1}{t_2(\omega) - t_1(\omega)} \quad (4.31)$$

die Geschwindigkeit, mit der sich diese Frequenz oder eine *Wellengruppe mit einem schmalen Frequenzband $\Delta\omega$ um die Frequenz ω* ausbreitet. U heißt daher Gruppengeschwindigkeit. Die Theorie der Oberflächenwellen von Punktquellen in Abschnitt 4.2 ergibt die noch einfachere Formel $U(\omega) = r/t(\omega)$, die nur *ein* Seismogramm voraussetzt; r ist die Entfernung von der Quelle, und $t(\omega)$ ist relativ zu dem Zeitpunkt zu nehmen, zu dem sie einen Impuls abstrahlt (seismologische Terminologie: Herdzeit). In der Praxis filtert man dieses Seismogramm schmalbandig mit Bandpässen der Mittenfrequenz ω . Die Ankunftszeit $t(\omega)$ liegt am Maximum der Einhüllenden des gefilterten Seismogramms. Die Gruppengeschwindigkeit kann also aus Beobachtungen ohne

prinzipielle Schwierigkeiten bestimmt werden. Es ist dann die Frage, wie sie mit der Phasengeschwindigkeit und daher mit den Parametern der Erde, d.h. den Geschwindigkeit von P - und S -Wellen und der Dichte als Funktion der Tiefe, zusammenhängt.

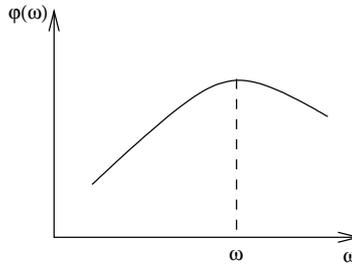
Wir gehen zur Untersuchung dieses Zusammenhangs von der Darstellung (4.28) des modalen Seismogramms aus und schreiben es unter Einführung der Wellenzahl $k = \omega/c$ wie folgt:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp [i(\omega t - kx)] d\omega \quad (4.32)$$

Für hinreichend große x und damit auch t ist die Phase

$$\varphi(\omega) = \omega t - kx$$

schnell veränderlich im Vergleich zur Funktion $A(\omega)$. Hat sich also beim Fortschreiten in ω $\varphi(\omega)$ um 2π geändert, so ist $A(\omega)$ praktisch noch unverändert, und das betrachtete ω -Intervall trägt normalerweise nichts zum Integral (4.32) bei. Das ist (siehe die Skizze) für solche $\omega = \omega_0$ *nicht mehr* richtig, für die $\varphi(\omega)$ gerade ein Extremum hat, also *stationär* ist.



Diese Frequenz folgt aus der Bestimmungsgleichung

$$\varphi'(\omega_0) = t - x \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (4.33)$$

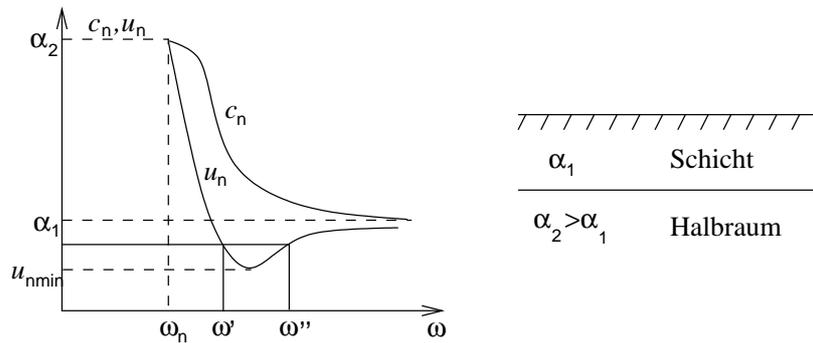
und hängt von t ab. Die Frequenz ω_0 , die (4.33) erfüllt, dominiert zum Zeitpunkt t im modalen Seismogramm. Weil bei der Betrachtung ebener Oberflächenwellen Orts- und Zeitnullpunkt beliebig sind, schreiben wir (4.33) für zwei Entfernungen x_1 und x_2 und die zugehörigen Zeitpunkte $t_1(\omega_0)$ und $t_2(\omega_0)$, subtrahieren und erhalten so die *Grundformel für die Gruppengeschwindigkeit*:

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2(\omega_0) - t_1(\omega_0)} = U(\omega_0) = \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (4.34)$$

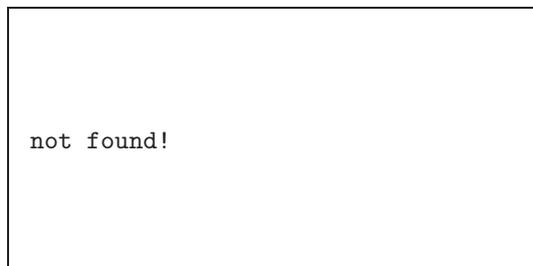
Der Zusammenhang zwischen ω und k geht über die Phasengeschwindigkeit $c = \omega/k$; benutzt man dies, so folgen aus (4.34) die expliziten Gruppengeschwindigkeitsformeln (4.26).

Die skizzierte Argumentation ist der Kerngedanke der *Methode der stationären Phase*. Wir werden sie später benutzen, um Integrale der Form (4.32) genähert zu berechnen; hier brauchten wir sie nur, um plausibel zu machen, dass es gerade die Gruppengeschwindigkeit ist, die die Aufeinanderfolge und gegebenenfalls auch Interferenz der Frequenzen im modalen Seismogramm bestimmt.

Zur Veranschaulichung des Gesagten betrachten wir eine beliebige Mode der *Rayleighwellen eines flüssigen Halbraums mit einer Schicht darüber*, deren Dispersionskurven für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit schematisch wie in der Skizze auf S. 4.1.5 aussehen (vgl. Übung 4.1.3). Zur Interpretation der Gruppengeschwindigkeitskurve verwenden wir nicht (4.31) bzw. den linken Teil von (4.34), sondern die auf S.106 erwähnte Formel, die sich auf die Quelle bezieht.



Aus dem Verlauf von U_n schließen wir, dass bei der betrachteten Mode in einer beliebigen Entfernung r von der Quelle zuerst Frequenzen in der Nachbarschaft der unteren Grenzfrequenz ω_n ankommen (vorausgesetzt natürlich, dass sie von der Quelle angeregt werden). Ihre Gruppengeschwindigkeit ist α_2 und ihre Gruppenlaufzeit r/α_2 . Für spätere Zeiten, die aber noch kleiner als r/α_1 sind, wird die Frequenz der ankommenden Schwingungen langsam größer, entsprechend dem steilen Verlauf der Kurve für U_n . Dieser Wellenzug heißt *Grundwelle*. Werden die Zeiten größer als r/α_1 , so tragen nun immer *zwei* Frequenzen, ω' und ω'' , zum Seismogramm bei, was sich darin äußert, dass auf der tieffrequenten Grundwelle die höherfrequente *Wasserwelle* reitet. Die Frequenzen von Grund- und Wasserwelle nähern sich einander mit wachsender Zeit und werden zum Zeitpunkt r/U_{nmin} schließlich gleich, wo U_{nmin} die minimale Gruppengeschwindigkeit ist. Die entsprechende Wellengruppe heißt *Airyphase* und bildet das Ende des modalen Seismogramms. Exakte Berechnungen modaler Seismogramme, die wir in späteren Abschnitten behandeln, bestätigen diese qualitativen Aussagen. Das folgende Beispiel (aus C.L. Pekeris: Theory of propagation of explosive sound in shallow water, Geol. Soc. Am. Memoir No. 27, 1948) zeigt den zeitlichen Verlauf des Drucks in der Grundmode:



Die Art der Dispersion der Grundwelle in diesem Beispiel—abnehmende Gruppengeschwindigkeit mit wachsender Frequenz, d.h. Zunahme der Frequenz mit der Zeit—bezeichnet man als *regulär*. Bei der Wasserwelle wächst die Gruppengeschwindigkeit mit der Frequenz, d.h. die Frequenz nimmt mit wachsender Zeit ab: diese Art der Dispersion heißt *invers*. Die Bezeichnungen reguläre bzw. inverse Dispersion sind zu trennen von den geläufigeren Begriffen *normale* und *anomale* Dispersion, mit denen man ausdrückt, dass die Geschwindigkeit kleiner bzw. größer als die Phasengeschwindigkeit ist.

Das folgende Bild soll abschließend die wesentlichen Eigenschaften der Ausbreitung dispergierter Wellenzüge *elementar* veranschaulichen. Es ist angenommen, dass die Quelle einen Impuls mit konstantem Spektrum im Frequenzband $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ abstrahlt und das Medium nur reguläre Dispersion erzeugt. Je weiter sich dieser Impuls ausbreitet, um so länger wird er. Gleichzeitig nehmen die Amplituden ab (was aus der Skizze allerdings nicht hervorgeht).

not found!

Konstante Frequenz sind auf *Geraden* durch den Ursprung ($r = 0, t = 0$) anzutreffen, deren Steigung dr/dt gleich der Gruppengeschwindigkeit ist. *Konstante Phasen*, etwa ein bestimmtes Maximum oder ein bestimmter Nulldurchgang, liegen auf *Kurven*, und die Frequenz variiert entlang dieser Kurven. Die lokale Steigung dr/dt dieser Kurven ist die Phasengeschwindigkeit bei der gerade vorherrschenden Frequenz.

Übung 4.4

Man waise die Formeln (4.26) für die Gruppengeschwindigkeit nach.

Übung 4.5

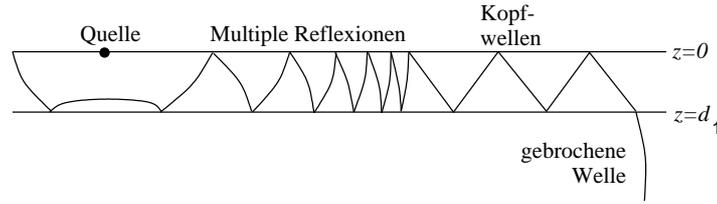
a) Wie lautet die allgemeinste Phasengeschwindigkeit $c(\omega)$, zu der die Gruppengeschwindigkeit $U(\omega)$ konstant ist? Man interpretiere das zugehörige modale Seismogramm (4.28).

b) Wie lautet der allgemeinste Zusammenhang zwischen zwei Phasengeschwindigkeiten $c_1(\omega)$ und $c_2(\omega)$, deren zugehörige Gruppengeschwindigkeit $U_1(\omega)$ und $U_2(\omega)$ identisch sind? Man benutze die Formel $1/U = dk/d\omega = d(\omega/c)/d\omega$.

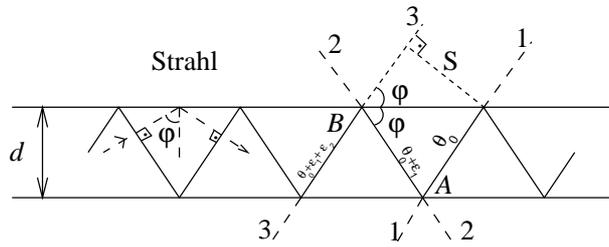
4.1.6 Erklärung von Oberflächenwellen durch konstruktive Interferenz von Raumwellen

Bis jetzt haben wir Oberflächenwellen mehr oder weniger abstrakt behandelt, nämlich auf Grund von Ansätzen für die Lösung der Differentialgleichungen elastischer Wellen, in die wir die Eigenschaften dieser Wellen hineinstecken (im wesentlichen Konzentration auf die Oberfläche, Ausbreitung entlang der Oberfläche und Dispersion). Wir haben noch keine anschauliche Vorstellung davon gewonnen, wie diese Wellen zustandekommen. In diesem Abschnitt soll an dem einfachen Beispiel der Lovewellen in einem Halbraum mit einer einzigen Schicht gezeigt werden, dass Oberflächenwellen weitgehend durch *konstruktive Interferenz von Raumwellen* entstehen, die zwischen den Trennflächen hin- und herreflektiert werden.

Wir betrachten *SH*-Raumwellen in der Schicht, die mit einem bestimmten Einfallswinkel φ zwischen den Grenzflächen hin- und herlaufen. Die Reflexion an der Oberfläche ist verlustfrei, der Reflexionskoeffizient nach (3.39) gleich $+1$. Bei der Reflexion an der Unterkante $z = d_1$ der Schicht treten aber Verluste durch Brechung auf, solange $\varphi < \varphi^* = \arcsin(\beta_1/\beta_2)$ ist. In diesem Fall nimmt die Amplitude der reflektierten Wellen mit der Zahl der Reflexionen an der Unterkante schnell ab. Ist aber $\varphi > \varphi^*$, so ist der Reflexionskoeffizient der Unterkante dem Betrag nach gleich 1 (vgl. (3.42)), und im Halbraum gilt es keine Welle, die Energie von der Trennfläche wegtransportiert. Somit bleibt die Amplitude der *einzelnen* Mehrfachreflexion erhalten. Das Wellenbild in der Schicht wird dann entscheidend durch die Interferenz *aller* Mehrfachreflexionen bestimmt. Für gewisse φ werden diese konstruktiv interferieren, für andere destruktiv. Wir suchen die φ mit konstruktiver Interferenz.



Dazu approximieren wir das aktuelle Wellenfrontenbild der folgenden Skizze lokal durch ebene Wellenfronten, die parallel zueinander sind und dem Einfallswinkel φ auf Trennfläche und Oberfläche entsprechen:



Diese Approximation ist umso besser, je weiter man von der Quelle entfernt ist. Die Beschränkung auf *ebene* Wellen bedeutet de facto, dass wir *freie* Normalmoden betrachten.

Die Phasen der benachbarten Wellenfronten 1, 2, 3 sind Φ_0 (beliebig), $\Phi_1 = \Phi_0 + \epsilon_1$ bzw. $\Phi_2 = \Phi_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2$, wobei ϵ_1 bzw. ϵ_2 die Phasenverschiebung bei der Reflexion in A bzw. B ist. Damit die Wellen 1 und 3 *in Phase* sind, muss die Phasendifferenz $\Phi_2 - \Phi_0$ gleich der lautzeitbedingte Phasendifferenz $\omega s/\beta_1$ plus ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein. Mit

$$s = 2 \frac{d_1}{\tan \varphi} \sin \varphi = 2d_1 \cos \varphi$$

erhalten wir folgende Bedingung für *konstruktive Interferenz*:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{2\omega d_1}{\beta_1} \cos \varphi + 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

Die Phasenverschiebung ϵ_1 und ϵ_2 sind die Phasen des Reflexionskoeffizienten für ebene *SH*-Wellen. Da wir nur überkritische $\varphi > \varphi^* = \arcsin(\beta_1/\beta_2)$ betrachten, folgt ϵ_1 aus (3.42) für $\omega > 0$:

$$\epsilon_1 = -2 \arctan \frac{b}{a} = -2 \arctan \left[\frac{-\rho_2 \beta_2 \left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} \sin^2 \varphi - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 \beta_1 \cos \varphi} \right]$$

Für die Reflexion bei B gilt $\epsilon_2 = 0$, da nach (3.39) der Reflexionskoeffizient einer freien Oberfläche immer gleich +1 ist.

Setzen wir alles in (4.35) ein, so ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für *die* Einfallswinkel φ , die bei vorgegebenem ω konstruktive Interferenz erzeugen:

$$\arctan \left[\frac{\rho_2 \beta_2 \left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} \sin^2 \varphi - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_1 \beta_1 \cos \varphi} \right] = \frac{\omega d_1}{\beta_1} \cos \varphi + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

In diese Gleichung führen wir die Scheingeschwindigkeit

$$c = \frac{\beta_1}{\sin \varphi} \quad (4.37)$$

ein, mit der sich die Wellenfronten in *horizontaler* Richtung ausbreitet. Mit $\cos \varphi = \beta_1(\beta_1^{-2} - c^{-2})^{1/2}$ und $\rho_{1,2}\beta_{1,2}^2 = \mu_{1,2}$ erhalten wir durch Umkehrung von (4.36) nun eine Bestimmungsgleichung für c :

$$\frac{\mu_2 (c^{-2} - \beta_2^{-2})^{\frac{1}{2}}}{\mu_1 (\beta_1^{-2} - c^{-2})^{\frac{1}{2}}} = \tan \left[\omega d_1 (\beta_1^{-2} - c^{-2})^{\frac{1}{2}} \right]$$

Sie ist identisch mit der Dispersionsgleichung (4.19) der Lovewellen. Dieselbe Gleichung hätten wir gefunden, wenn wir Wellen betrachtet hätten, die in der Skizze auf S.110 nach rechts oben (und nicht nach rechts unten) laufen. Die Superposition dieser beiden Gruppen von Wellen ergibt aus Symmetriegründen eine Welle mit *senkrechten* Wellenfronten. Daher ist c nicht nur eine Scheingeschwindigkeit, sondern die Phasengeschwindigkeit dieser resultierenden Welle.

Wir sehen also, dass die Lovewellen im Halbraum mit einer Schicht durch *konstruktive Interferenz von Raumwellen* entstehen, die *überkritische* Einfallswinkel besitzen. Für diese Einfallswinkel geht keine Energie aus der Schicht in den Halbraum über. Die Energie bleibt in der Schicht: diese wirkt als perfekter *Wellenleiter* (eng. wave guide). Das gilt ganz allgemein für Normalmoden von Love- und Rayleighwellen in horizontal geschichteten Medien, vorausgesetzt, diese Normalmoden können existieren. Hieraus entnehmen wir auch, dass die Phasengeschwindigkeit von Normalmoden *höchstens* gleich der S -Geschwindigkeit des Halbraums unter den Schichten sein kann:

$$c \leq \beta_n$$

Wäre sie größer, so entstünde Ausstrahlung in dieser Halbraum in Form einer S -Welle. *Verlust-behaftete Moden* (engl. leaking modes) entstehen ebenfalls durch konstruktive Interferenz von Raumwellen. In diesem Fall sind die Einfallswinkel *unterkritisch*, und die Phasengeschwindigkeit ist größer als β_n . Es findet also Ausstrahlung in den Halbraum statt, und der Wellenleiter ist nicht perfekt.

Abschließend sei bemerkt, dass die Erklärung von Oberflächenwellen durch konstruktive Interferenz von Raumwellen nicht auf die *Rayleigh-Grundmode* angewandt werden kann. Die Rayleighwelle des homogenen Halbraums z.B. existiert ohne jede weitere Diskontinuität außer der Oberfläche. Für die Entstehung der Rayleigh-Grundmode gibt es keine einfache, anschauliche Vorstellung.

Übung 4.6

Man berechne die Dispersionskurven für eine Flüssigkeitsschicht, deren Begrenzungen (1) beide frei, (2) beide starr, (3) zum einen frei, zum anderen starr sind. Man benutze die Argumentation von Abschnitt 4.1.6 und vergleiche mit der Lösung der entsprechenden Eigenwertprobleme. Man gebe die Gruppengeschwindigkeit an und skizziere die Druck-Tiefen-Verteilungen.

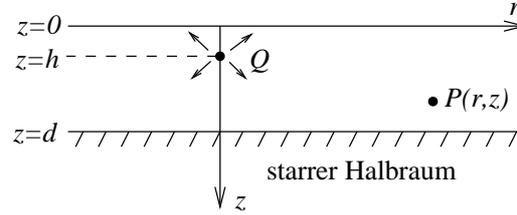
4.2 Oberflächenwellen und Punktquellen

4.2.1 Idealer Wellenleiter bei harmonischer Anregung

Reihendarstellung des Verschiebungspotentials

Wir untersuchen die Ausbreitung monochromatischer Schallwellen von einer Explosions-Punktquelle in einer Flüssigkeitsschicht, die auf einem *starr*en Halbraum liegt und freie Oberfläche hat. Das ist ein idealer Wellenleiter, da überhaupt keine Wellen in den Halbraum eindringen können. An

ihm kann man wesentliche Eigenschaften von Oberflächenwellen bei Anregung durch Punktquelle studieren, ohne dass der Aufwand zu groß ist.



Für das Verschiebungspotential Φ in der Schicht machen wir in Analogie zu (3.48) und unter Benutzung von (3.85) für das Potential der Kugelwelle von der Quelle folgenden Integralansatz (der zeitabhängige Faktor $e^{i\omega t}$ wird immer weggelassen):

$$\Phi = \int_0^\infty J_0(kr) \left[\frac{k}{il} e^{-il|z-h|} + A(k)e^{-ilz} + B(k)e^{ilz} \right] dk \quad (4.38)$$

$$l = \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$J_0(kr)$ ist die Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung. Die Wurzel l ist wie in den Abschnitten 3.6.5 und 3.7 entweder positiv reell oder negativ imaginär. Wie man nachrechnen kann, ist Φ eine Lösung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten. Der erste Term in (4.38) ist die Welle von der Quelle, der zweite bzw. dritte entspricht den übrigen in die positive bzw. negative z -Richtung laufenden Wellen. $A(k)$ und $B(k)$ folgen aus den Randbedingungen für die Trennflächen:

$$z = 0 : \quad \text{Spannung} \quad p_{zz} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho \omega^2 \Phi = 0 \quad \text{oder} \quad \Phi = 0$$

$$z = d : \quad \text{Normalverschiebung} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

Hieraus folgt:

$$A(k) + B(k) = -\frac{k}{il} e^{-ilh}$$

$$A(k) - e^{2ild} B(k) = -\frac{k}{il} e^{ilh}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind (man überzeuge sich davon):

$$A(k) = -\frac{k \cos[l(d-h)]}{il \cos(ld)}$$

$$B(k) = \frac{k \sin(lh)}{l \cos(ld)} e^{-ild}$$

Man setzt sie in (4.38) ein und erhält nach Umrechnung:

$$0 \leq z \leq h : \quad \Phi = 2 \int_0^\infty k J_0(kr) \frac{\sin(lz) \cos[l(d-h)]}{l \cos(ld)} dk \quad (4.39)$$

$$h \leq z \leq d : \quad \Phi = 2 \int_0^\infty k J_0(kr) \frac{\sin(lh) \cos[l(d-z)]}{l \cos(ld)} dk \quad (4.40)$$

Bevor wir diese Ausdrücke mit funktionentheoretischen Methoden umformen, sei erwähnt, dass eine Vertauschung von Quelle und Beobachtungspunkt den Wert von Φ nicht ändert. Auch die

Verschiebungen und der Druck bleiben dieselben. Das ist ein Beispiel für *Reziprozitätsbeziehungen*, von denen es in der Theorie elastischer Wellen noch weitere gibt.

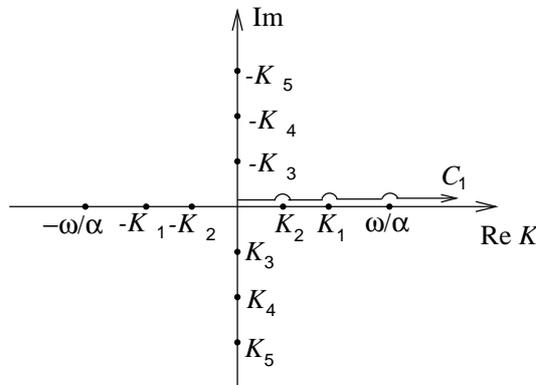
Die Pole k_n der Integranden in (4.39) und (4.40) bestimmen sich aus der Bedingung

$$dl_n = d \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \pm(2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Das ergibt

$$k_n = \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4d^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.41)$$

Die Pole, deren Zahl unendlich groß ist, liegen auf der reellen Achse zwischen $-\omega/\alpha$ und $+\omega/\alpha$ und auf der imaginären Achse. Wieviele Pole auf der reellen Achse liegen, hängt von ω ab. Wegen dieser Pole müssen wir den Integrationsweg in (4.39) und (4.40) näher spezifizieren. Es soll der Weg C_1 aus der Skizze sein, der diese Pole im ersten Quadranten umgeht:



Im folgenden diskutieren wir nur (4.39) im einzelnen. (4.40) lässt sich genauso behandeln. Wir benutzen die Identität

$$J_0(kr) = \frac{1}{2} \left[H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(2)}(kr) \right],$$

wobei $H_0^{(1)}(kr)$ und $H_0^{(2)}(kr)$ Besselsche Funktionen dritter Art (=Hankelsche Funktionen) und nullter Ordnung sind (Anhang C, Formeln (C.2) und (C.3)).

Damit wird

$$\Phi = \int_{C_1} k \left[H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(2)}(kr) \right] \frac{\sin(lz) \cos[l(d-h)]}{l \cos(ld)} dk. \quad (4.42)$$

Unter Benutzung des Zusammenhangs (Anhang C, Formel (C.6))

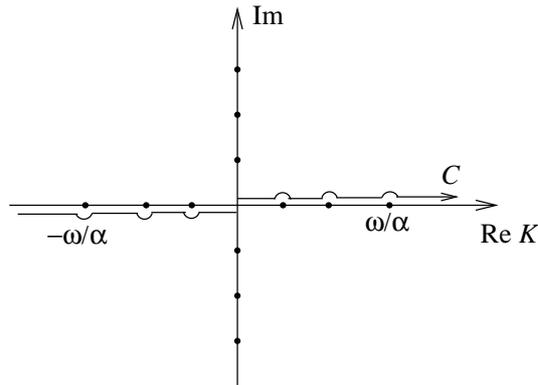
$$H_0^{(1)}(x) = -H_0^{(2)}(-x)$$

kann man erste Teilintegral in (4.42) wie folgt schreiben:

$$- \int_{C_1} k H_0^{(2)}(-kr) \frac{\sin(lz) \cos[l(d-h)]}{l \cos(ld)} dk = \int_{C_2} u H_0^{(2)}(ur) \frac{\sin(lz) \cos[l(d-h)]}{l \cos(ld)} du; \quad (u = -k)$$

Der Integrationsweg C_2 liegt punktsymmetrisch zum Weg C_1 , bezogen auf den Ursprung, wird aber von $-\infty$ bis 0 durchlaufen. Einsetzen in (4.42) und durchgängige Verwendung von k als Integrationsvariable ergibt

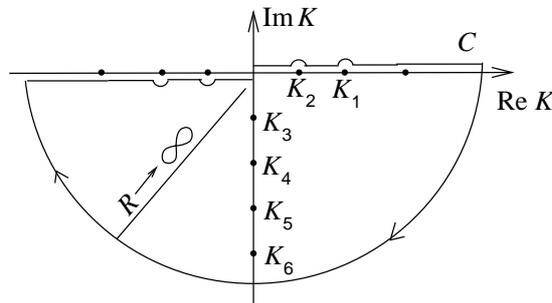
$$\Phi = \int_C k H_0^{(2)}(kr) \frac{\sin(lz) \cos[l(d-h)]}{l \cos(ld)} dk = \int_C I(k) dk \quad (4.43)$$



Der Integrationsweg C geht, wie in der Skizze angedeutet, von $-\infty$ nach $+\infty$ unter Umgehung der Pole auf der reellen Achse.

Obwohl in (4.43) die doppeldeutige Wurzel l auftritt, ist $I(k)$ eine eindeutige Funktion von k . $I(k)$ ist nämlich eine gerade Funktion von l , auf dessen Vorzeichen es also *nicht* ankommt. Wie vereinbaren, l aus *dem* Blatt seiner Riemannsche Fläche zu nehmen, in dem $l \simeq -ik$ für $|k| \rightarrow \infty$ ist. Bei komplizierteren Wellenleitern, etwa wenn der Halbraum nicht starr ist, ist auch $I(k)$ mehrdeutig, und die Theorie wird etwas schwieriger (Einführung von *Verzweigungsschnitten*).

Nun wenden wir den *Residuensatz* auf den untenstehend gezeichneten geschlossene Integrationsweg an, der aus dem Weg C und einem Halbkreis mit unendlich großem Radius besteht, und als *einzig*e Singularitäten die Pole von $I(k)$ umschließt:



Wenn wir die *asymptotische Darstellung* der Hankelfunktion benutzen, die für betragsgroßes Argument gilt (Anhang C, Formeln (C.4)),

$$H_0^{(2)}(kr) \simeq \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \quad (4.44)$$

so sehen wir, dass ihre Werte auf dem Halbkreis in der unteren Halbebene, wo k negativen Imaginärteil hat, verschwindet (für $R \rightarrow \infty$). Das entsprechende Integral verschwindet ebenfalls, und wir haben eine Darstellung des Potentials Φ als unendliche Summe von Residuen gefunden. Die Berechnung des Residuums eines Quotienten $f_1(k)/f_2(k)$ an der Stelle k_n mit $f_2(k_n) = 0$ geschieht nach der Formel

$$\text{Res} \frac{f_1(k)}{f_2(k)} \Big|_{k=k_n} = \frac{f_1(k_n)}{f_2'(k_n)},$$

vorausgesetzt, k_n ist ein Pol *erster* Ordnung. In unserem Fall folgt k_n aus (4.41) und ist entweder positiv reell oder negativ imaginär. Das zugehörige l ist

$$l_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}.$$

Weiterhin ist hier $f_2(k) = \cos(ld)$, $f_2(k_n) = \cos(l_n d) = 0$ und

$$f_2'(k_n) = d \frac{k_n}{l_n} \sin(l_n d).$$

Schließlich ist

$$\cos[l_n(d-h)] = \cos(l_n d) \cos(l_n h) + \sin(l_n d) \sin(l_n h) = \sin(l_n d) \sin(l_n h).$$

Damit wird

$$\text{Res } I(k)|_{k=k_n} = \frac{1}{d} H_0^{(2)}(k_n r) \sin(l_n z) \sin(l_n h).$$

Wir erhalten also folgende *Reihendarstellung des Potentials* Φ , bei der nun $e^{i\omega t}$ wieder hinzugefügt ist:

$$\Phi = -\frac{2i}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi h}{2d}\right] \sin\left[(2n-1)\frac{\pi z}{2d}\right] H_0^{(2)}(k_n r) e^{i\omega t} \quad (4.45)$$

Dieser Ausdruck gilt nicht nur für $0 \leq z \leq h$, sondern für *beliebige* Tiefe, da man für (4.40) dieselbe Reihendarstellung findet. Aus (4.45) lassen sich leicht die Verschiebungskomponenten $\partial\Phi/\partial r$ und $\partial\Phi/\partial z$ und der Druck $p = -p_{zz} = \rho\omega^2\Phi$ ableiten.

Beim idealen Wellenleiter lässt sich das Feld aus Polbeiträgen *allein* aufbauen, deren jeder, wie wir anschließend sehen werden, eine Mode darstellt. Bei komplizierteren Wellenleitern gibt es außer Polbeiträgen noch Beiträge in Form von Kurvenintegralen in der komplexen k -Ebene, die vor allem Raumwellenanteile des Wellenfeldes darstellen.

Moden und ihre Eigenschaften

Jeder Summand in (4.45) stellt eine *Mode* dar. Das ist zunächst eine Bezeichnung. Sie fügt sich aber sinnvoll in das Modenkonzzept ein, das wir in den vorangegangenen Abschnitten für *freie* Oberflächenwellen kennengelernt hatten. Betrachten wir nämlich die Summanden in (4.45) für große Entfernungen r , so können wir (4.44) benutzen ($|k_n r| > 10$):

$$\Phi = \frac{-2\sqrt{2\pi}ie^{i\frac{\pi}{4}}}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi h}{2d}\right] \sin\left[(2n-1)\frac{\pi z}{2d}\right] \frac{1}{(k_n r)^{\frac{1}{2}}} e^{i(\omega t - k_n r)} \quad (4.46)$$

Die wichtigsten Summand in (4.46) sind die mit positivem k_n . Ihre Zahl ist endlich und wächst mit ω . Sie entsprechen Wellen mit zylindrischer Wellenfront, die sich in $+r$ -Richtung mit der frequenzabhängigen Phasengeschwindigkeit

$$c_n(\omega) = \frac{\omega}{k_n} = \left[1 - \frac{(2n-1)^2 \pi^2 \alpha^2}{4d^2 \omega^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.47)$$

ausbreiten. Löst man das Eigenwertproblem für *freie* Oberflächenwellen in demselben Wellenleiter (vgl. Übung 4.1.6), so erhält man für die n -te *freie Normalmode*

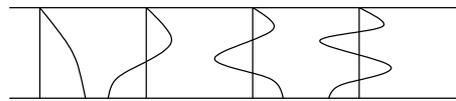
$$\Phi_n = A \sin\left[(2n-1)\frac{\pi z}{2d}\right] e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c_n(\omega)}\right)} \quad (4.48)$$

mit $c_n(\omega)$ gemäß (115). Darüberhinaus stimmen in (4.46) und (4.48) auch die Terme überein, die die z -Abhängigkeit beschreiben. Es ist daher vernünftig, den einzelnen Summanden in (4.45) bzw. (4.46), sofern $k_n > 0$ ist, als n -te *erzwungene Normalmode* zu bezeichnen. Der Unterschied zu (4.48) besteht in der Amplitudenabnahme proportional zu $r^{-1/2}$ und im Hinzutreten eines von der Quelltiefe h abhängigen Faktors. Diesen kann man als *Anregungsfunktion der Mode* bezeichnen. Liegt nämlich die Quelle in einer Knotenfläche der freien Mode (4.48), so verschwindet die Anregungsfunktion, und die Mode wird nicht angeregt. Maximale Anregung erfolgt, wenn die Quelle in der Tiefe liegt, wo die freie Mode maximale Amplitude hat.

Aus der Gegenüberstellung von freien und erzwungenen Normalmoden wird klar, welche Bedeutung die Untersuchung freier Normalmoden hat: sie liefern die dispersiven Eigenschaften und die Amplituden-Tiefenverteilung der erzwungenen Normalmoden und damit die wichtigste Information über diese. *Das ist auch bei komplizierten Wellenleitern so.*

Die Terme in (4.46) mit negativ imaginärem k_n stellen gar keine Wellen dar, sondern Schwingungen, deren Amplitude in r -Richtung exponentiell abnimmt. Sie bestimmen das Wellenfeld nur in der Nähe der Quelle mit, wo man dann korrekterweise mit (4.45) rechnen muss. *Das Fernfeld wird von den Normalmoden geprägt.*

Die Zahl der *Knotenflächen* der n -ten Mode ist n und ihr Abstand $2d/(2n-1)$ ($n = 2, 3, \dots$). Potential Φ , Horizontalverschiebung $\partial\Phi/\partial r$ und Druck p haben für $z = 0$ einen Knoten und für $z = d$ einen Bauch (siehe Skizze), bei der Vertikalverschiebung $\partial\Phi/\partial z$ ist es umgekehrt.



Amplituden-Tiefenverteilung für
und p (Eigenfunktionen)

Die Phasengeschwindigkeit (4.47) der n -ten Mode lässt sich wie folgt schreiben:

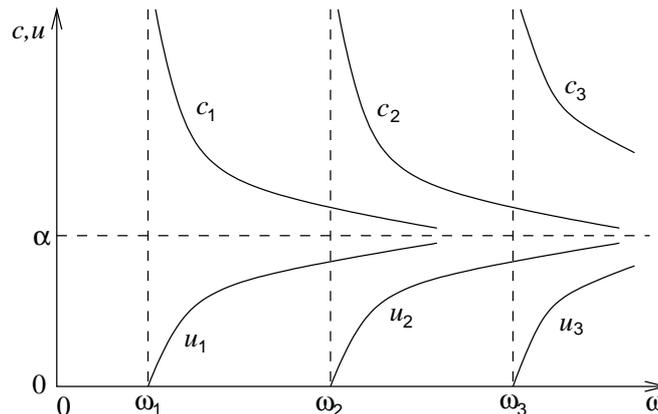
$$c_n(\omega) = \alpha \left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

mit der unteren Grenzfrequenz

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi\alpha}{2d}.$$

Es treten unendlich große Phasengeschwindigkeit auf. Die Gruppengeschwindigkeit ist nach (4.26):

$$U_n(\omega) = \alpha \left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.50)$$



Eine wichtige Eigenschaft des idealen Wellenleiters mit einer starren und einer freien Wand ist die, dass Kreisfrequenzen $\omega < \omega_1 = \pi\alpha/2d$ (oder Frequenzen $\nu < \alpha/4d$ bzw. Wellenlängen $\Lambda > 4d$) sich *nicht ungedämpft* ausbreiten können. Beim idealen Wellenleiter mit zwei starren Wänden gibt es diese Einschränkung nicht (vgl. Übung 4.6). Bei ihm existiert außer den Moden vom obigen Typ (mit anderen Grenzfrequenzen) noch eine Grundmode, die bei allen Frequenzen auftreten kann. Ihre Phasengeschwindigkeit ist frequenzabhängig und gleich α .

4.2.2 Das modale Seismogramm des idealen Wellenleiters

In diesem Abschnitt wollen wir zu einem beliebigen Summanden in (4.45) das zugehörige *modale Seismogramm* exakt berechnen.

Im nächsten Abschnitt wird hierzu die Methode der stationären Phase benutzt.

Das Potential (4.45) entspricht zeitlich harmonischer Anregung, d.h. im Potential

$$\Phi_0 = \frac{1}{R} F \left(t - \frac{R}{\alpha} \right) \quad (4.51)$$

der Explosions-Punktquelle ist $F(t) = e^{i\omega t}$. Wir wollen von diesem Gesetz zur Anregung durch die Deltafunktion, $F(t) = \delta(t)$, übergehen. Hierzu müssen wir (4.45) mit dem Spektrum der Deltafunktion, $\overline{F}(\omega) = 1$, multiplizieren und in den Zeitbereich zurückgehen. Die so erhaltenen modalen Seismogramme kann man dann weiter mit beliebigen realistischen Anregungsfunktionen $F(t)$ falten. Aus den Seismogrammen für $F(t) = \delta(t)$ kann man aber schon alles wesentliche ersehen.

Wir betrachten dazu die n -ten Mode in der Reihe (4.45). Ihre Fouriertransformierte bei Anregung durch die Deltafunktion ist bis auf Geometriefaktoren gleich $\overline{H}_n(\omega) = iH_0^{(2)}(k_n r)$ mit $k_n = (\omega^2 - \omega_n^2)^{1/2}/\alpha$. Wir gehen über zur Laplacetransformierten (vgl. Abschnitt A.1.7 von Anhang A)

$$h_n(s) = \overline{H}_n(-is) = iH_0^{(2)} \left[-i \frac{r}{\alpha} (s^2 + \omega_n^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

und benutzen noch den Zusammenhang

$$H_0^{(2)}(-ix) = \frac{2i}{\pi} K_0(x)$$

zwischen der Hankelfunktion und der modifizierten Besselfunktion $K_0(x)$ (die wir bereits in Abschnitt 3.8 kennengelernt hatten):

$$h_n(s) = -\frac{2}{\pi} K_0 \left[\frac{r}{\alpha} (s^2 + \omega_n^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Die Originalfunktion hierzu kann in Korrespondenztafeln gefunden werden:

$$H_n(t) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos \left[\omega_n \left(\frac{t^2 - r^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(\frac{t^2 - r^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Damit erhalten wir die n -te Mode das Potential

$$\Phi_n = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \frac{r}{\alpha} \\ \frac{4}{d} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi h}{2d} \right] \sin \left[(2n-1) \frac{\pi z}{2d} \right] \frac{\cos \left[\omega_n \left(\frac{t^2 - r^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(\frac{t^2 - r^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}} & \text{für } t > \frac{r}{\alpha} \end{cases} \quad (4.52)$$

Das ist für *alle* n eine Normalmode, denn die Deltafunktion enthält beliebig hohe Frequenzen, so dass die untere Grenzfrequenz jeder Normalmode in (4.46) überschritten werden kann.

Der Einfachheit wegen beschränken wir im folgenden die Diskussion auf das Potential Φ_n . Alle Schlüsse lassen sich jedoch auch auf die Verschiebungen und den Druck übertragen. Das Seismogramm (s. Skizze) beginnt zum Zeitpunkt $t = r/\alpha$, und zwar mit einer Singularität, die integrierbar ist. Danach klingen die Amplituden unter Oszillationen ab, und zwar mit $1/t$ für Zeiten, die groß gegen r/α sind. Das Entscheidende an Φ_n ist seine *Frequenzmodulation oder Dispersion*: die Frequenzen nehmen von großen Werten ab bis zur Grenzfrequenz ω_n der betrachteten Mode. Die Dispersion in diesem Beispiel ist also invers.

not found!

Am exakten modalen Seismogramm (4.52) lässt sich bestätigen, was wir in Abschnitt 4.1.5 über die Gruppengeschwindigkeit gelernt hatten. Wir fragen dazu zunächst, welche Frequenz ω zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 im modalen Seismogramm vorherrscht.

Die Diskussion kann man auf die Kosinusfunktion in (4.52) beschränken, sobald man sich etwas von der Singularität entfernt hat. Will man allgemein die Funktion $\cos[f(t)]$ in der Nähe von $t = t_0$ durch die monochromatische Schwingung $\cos[\varphi_0 + \omega(t_0)t]$ approximieren, wo φ_0 eine von t unabhängige Phase ist und $\omega(t_0)$ die gesuchte *Momentankreisfrequenz*, so linearisiert man $f(t)$ bei $t = t_0$:

$$\cos[f(t)] \approx \cos[f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)]$$

Hieraus folgt: $\omega(t_0) = f'(t_0)$. Wenden wir das auf (4.52) an, so ergibt sich

$$\omega(t_0) = \omega_n t_0 \left(t_0^2 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hieraus leiten wir den Quotient r/t_0 ab, also die Geschwindigkeit, mit der sich eine Wellengruppe der Frequenz $\omega(t_0)$ von der Quelle bis zum Aufpunkt ausbreitet, und erhalten

$$\frac{r}{t_0} = \alpha \left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = U_n(\omega)$$

aus (4.50), also genau die *Gruppengeschwindigkeit* der n -ten Mode. Wir finden also die Aussage aus Abschnitt 4.1.5 bestätigt, dass jede Frequenz, die von der Quelle abgestrahlt wird, den Weg zum Aufpunkt mit ihrer Gruppengeschwindigkeit läuft.

Das *vollständige Seismogramm* im Wellenleiter entsteht durch Faltung der modalen Seismogramme (4.52) mit einer realistischen Anregungsfunktion $F(t)$, deren Spektrum eine obere Grenzfrequenz hat, und abschließende Summation. Dabei tragen nur jene Normalmoden (4.52) wesentlich zum Seismogramm bei, deren untere Grenzfrequenz kleiner als die obere Grenzfrequenz von $F(t)$ ist. Oft bewirken die Übertragungseigenschaften von Hydrophonen und Seismometern und dissipative Mechanismen in Wellenleiter selbst eine weitere Reduzierung der Zahl der Moden. In der Praxis tragen jedenfalls nur wenige Moden zu den beobachteten Oberflächenwellen bei.

4.2.3 Berechnung des modalen Seismogramms mit der Methode der stationären Phase

Die Berechnung des modalen Seismogramms ist *exakt* nur für ideale Wellenleiter (mit starren und/oder freien Wänden) möglich. Im folgenden wird eine Näherungsmethode angegeben und am Beispiel des bisher betrachteten Wellenleiters demonstriert, die das modale Seismogramm zur Fernfeldform einer Normalmode von Typ (4.46) liefert. Es ist die schon skizzierte *Methode der stationären Phase*.

Multipliziert man eine Normalmode in (4.46) mit dem Spektrum $\overline{F}(\omega)$ der Anregungsfunktion $F(t)$ in (4.51) und geht zurück in den Zeitbereich, so erhält man das modale Seismogramm als

Fourierintegral. Um die Integration über negative Frequenzen zu vermeiden, machen wir von der Tatsache Gebrauch, dass es für *reelle* Funktionen $f(t)$ neben der üblichen Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

auch noch die äquivalente Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \bar{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

gibt. Damit wird das modale Seismogramm

$$\Phi_n = \operatorname{Re} \left\{ \frac{-2\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi d}} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi h}{2d} \right] \sin \left[(2n-1) \frac{\pi z}{2d} \right] \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(\omega)}{\sqrt{k_n}} e^{i(\omega t - k_n r)} d\omega \right\} \quad (4.53)$$

Die genäherte Berechnung des Integrals über ω beruht wie in Abschnitt 4.1.5 auf der Tatsache, dass bei den in Fragen kommenden Zeiten t die Phase

$$\varphi(\omega) = \omega t - k_n r \quad (4.54)$$

normalerweise *schnell veränderlich* ist im Vergleich zur Funktion $\bar{F}(\omega)$. Frequenzen mit stationären Phasenwerten folgen aus der Bestimmungsgleichung

$$\varphi'(\omega_0) = t - r \left. \frac{dk_n}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = 0$$

und hängen von t ab. Das heißt: die Frequenz ω_0 , für die gerade die Gruppengeschwindigkeit

$$U_n(\omega_0) = \left. \frac{d\omega}{dk_n} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{r}{t}$$

ist, dominiert zum Zeitpunkt t im modalen Seismogramm.

Hieraus folgt zunächst einmal das Prinzip der *Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit* aus einem beobachteten modalen Seismogramm. Man bestimmt für die Zeiten t , bezogen auf die Herdzeit, die Momentanfrequenz, und aus t und der Herdentfernung r die zugehörigen Gruppengeschwindigkeiten. *Herdzeit und Epizentrum* des Erdbebens müssen also bekannt sein. Damit hat man ein Stück der Dispersionskurve der Gruppengeschwindigkeit gefunden und kann nun versuchen, dieses Stück durch Modellrechnungen zu verifizieren. Die Zuordnung einer Frequenz zu einem Zeitpunkt, die hier notwendig ist, ist zwar vom Prinzip her nicht eindeutig, aber man kann den Fehler abschätzen, der damit möglicherweise verbunden ist. Mit dieser Methode, angewandt auf Oberflächenwellen von Erdbeben, wurde seit den zwanziger Jahren eine Reihe von wichtigen Ergebnissen gefunden, so zum Beispiel die mittlere Dicke der Erdkruste in den verschiedensten Teilen der Welt (vgl. die Auffächerung der Dispersionskurven für U im Bild auf S.106). Ihr Nachteil besteht darin, dass die Aussage sich auf den *ganzen* Bereich zwischen Herd und Station bezieht, also nur eine mittlere Struktur liefert. Daher arbeitet man heute, wenn möglich, mit mehreren Stationen und legt der Interpretation die Phasengeschwindigkeit zugrunde (vgl. Abschnitt 4.1.4)

Die *Berechnung des modalen Seismogramms* erfordert dann noch folgende Schritte. Wir machen, bei vorgegebener Zeit t , eine Reihenentwicklung der Phase (4.54) um die stationäre Frequenz ω_0 , die durch

$$U_n(\omega_0) = \frac{r}{t} \quad (4.55)$$

bestimmt ist:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\omega) &= \varphi(\omega_0) + \frac{1}{2} \varphi''(\omega_0) (\omega - \omega_0)^2 \\ \varphi''(\omega_0) &= \frac{r}{U_n^2(\omega_0)} \frac{dU_n}{d\omega}(\omega_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Eine wichtige Voraussetzung ist hier: $\varphi''(\omega_0) \neq 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\overline{F}(\omega)}{\sqrt{k_n}} e^{i\varphi(\omega)} d\omega &\approx \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \frac{\overline{F}(\omega)}{\sqrt{k_n}} \exp \left\{ i \left[\varphi(\omega_0) + \frac{1}{2} \varphi''(\omega_0) (\omega - \omega_0)^2 \right] \right\} d\omega \\ &\approx \frac{\overline{F}(\omega_0) e^{i\varphi(\omega_0)}}{\sqrt{k_n(\omega_0)}} \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \exp \left\{ \frac{i}{2} \varphi''(\omega_0) (\omega - \omega_0)^2 \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir uns auf die Nachbarschaft der Frequenz ω_0 beschränkt, wo $\varphi(\omega)$ stationär ist. Die anderen Frequenzen tragen nichts wesentliches bei. Mit $x = (\omega - \omega_0) \left(\frac{1}{2} |\varphi''(\omega_0)| \right)^{1/2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \exp \left\{ \frac{i}{2} \varphi''(\omega_0) (\omega - \omega_0)^2 \right\} d\omega &= \left(\frac{2}{|\varphi''(\omega_0)|} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\Delta\omega \left(\frac{|\varphi''(\omega_0)|}{2} \right)^{1/2}}^{+\Delta\omega \left(\frac{|\varphi''(\omega_0)|}{2} \right)^{1/2}} e^{\pm ix^2} dx \\ &\approx \left(\frac{2}{|\varphi''(\omega_0)|} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ix^2} dx \\ &= \left(\frac{2\pi}{|\varphi''(\omega_0)|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

(mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$).

Das positive bzw. negative Vorzeichen in dem Exponentialfaktor gilt, wenn $\varphi''(\omega_0) > 0$ bzw. < 0 ist. Die Ausdehnung der Integrationsgrenzen auf $x = \pm\infty$ ist erlaubt, da sie proportional zu \sqrt{r} sind und r sehr groß ist, und da der wesentliche Beitrag zum Integral nur von relativ kleinen Werten von x kommt (etwa $|x| \leq 5$). Fassen wir alles zusammen, so lautet das modale Seismogramm für den idealen Wellenleiter in der Näherung, die durch die Methode der stationären Phase gegeben wird (mit $\varphi''(\omega_0) > 0$):

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{-2\sqrt{2}i e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi d}} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi h}{2d} \right] \sin \left[(2n-1) \frac{\pi z}{2d} \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \overline{F}(\omega_0) e^{i\varphi(\omega_0)} \left[\frac{2\pi}{rk_n(\omega_0) |\varphi''(\omega_0)|} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Benutzt man

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_0) &= \omega_0 t - k_n(\omega_0) r, \\ k_n(\omega_0) &= \frac{\omega_0}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{r}{t} &= U_n(\omega_0) = \alpha \left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und $\varphi''(\omega_0)$ aus (4.56), und eliminiert $\omega_0 = \omega_0(t) = \omega_n t (t^2 - r^2/\alpha^2)^{-1/2}$ aus (4.57), so erhält man nach einiger Umformung und für die Annahme $\overline{F}(\omega_0) = 1$, die der Anregungsfunktion $F(t) = \delta(t)$ entspricht, folgendes *modale Seismogramm* (bitte nachrechnen):

$$\Phi_n = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \frac{r}{\alpha} \\ \frac{4}{d} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi h}{2d} \right] \sin \left[(2n-1) \frac{\pi z}{2d} \right] \frac{\cos \left[\omega_n \left(t^2 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(t^2 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}} & \text{für } t > \frac{r}{\alpha} \end{cases} \quad (4.58)$$

Es ergibt sich also das strenge Resultat (4.52). Das ist recht erstaunlich, bedenkt man die Näherung, die wir benutzt haben. Wir können hieraus den allgemeinen Schluss ziehen, dass die Methode der stationären Phase auch bei komplizierteren Wellenleitern gute Näherungen für die Normalmoden liefert.

Für Frequenzen ω_0 mit $\varphi''(\omega_0) = 0$, also mit $\frac{dU_m}{d\omega}(\omega_0) = 0$ und daher mit stationären Werten der Gruppengeschwindigkeit (die beim idealen Wellenleiter nicht auftreten), muss die Reihenentwicklung in (4.56) um ein Glied weiter getrieben werden. Der weitere Gang der Rechnung wird dadurch etwas anders (vgl. Anhang E). Er liefert den *Verlauf von Airyphasen* und zeigt, dass diese zumeist die dominierenden Teile der modalen Seismogramme sind (vgl. das Bild auf S.108).

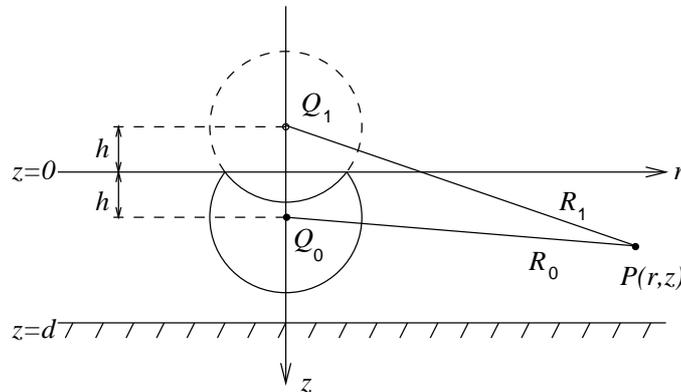
4.2.4 Strahldarstellung des Feldes in einem idealen Wellenleiter

In den letzten beiden Abschnitten hatten wir gelernt, dass sich das Feld in einem idealen Wellenleiter aus erzwungenen Normalmode zusammensetzt. Des weiteren hatte sich in Abschnitt 4.1.6 gezeigt, dass freie Normalmode durch konstruktive Interferenz von mehrfach im Wellenleiter reflektierten ebenen Raumwellen entstehen. Daher liegt die Frage nahe, ob sich auch das Feld einer Punktquelle in einem idealen Wellenleiter durch Superposition von Mehrfachreflexionen darstellen lässt, ob es eine Strahldarstellung des Wellenfeldes gibt. Weiterhin interessiert uns, ob Moden- und Strahldarstellung des Wellenfeldes einander äquivalent sind.

Wir betrachten zunächst die Reflexion der Kugelwelle

$$\Phi_0 = \frac{1}{R_0} F\left(t - \frac{R_0}{\alpha}\right) \quad (4.59)$$

an der zur Punktquelle benachbarten Trennfläche des Wellenleiters, z.B. an der freien Oberfläche.



Das Potential der Reflexion ist leicht anzugeben:

$$\Phi_1 = \frac{-1}{R_1} F\left(t - \frac{R_1}{\alpha}\right) \quad (4.60)$$

R_1 ist die Entfernung zwischen $P(r, z)$ und der *Bildquelle* Q_1 . Solange die Reflexion von der unteren (starken) Wand des Wellenleiters die Oberfläche noch nicht erreicht hat, ist das Potential in der Nachbarschaft der Oberfläche gleich $\Phi_0 + \Phi_1$ und verschwindet daher in der Oberfläche selbst. $\Phi_0 + \Phi_1$ erfüllt daher für solche Zeiten die Bedingung der Spannungsfreiheit der Fläche $z = 0$ ($p_{zz} = \rho \partial^2(\Phi_0 + \Phi_1)/\partial t^2$).

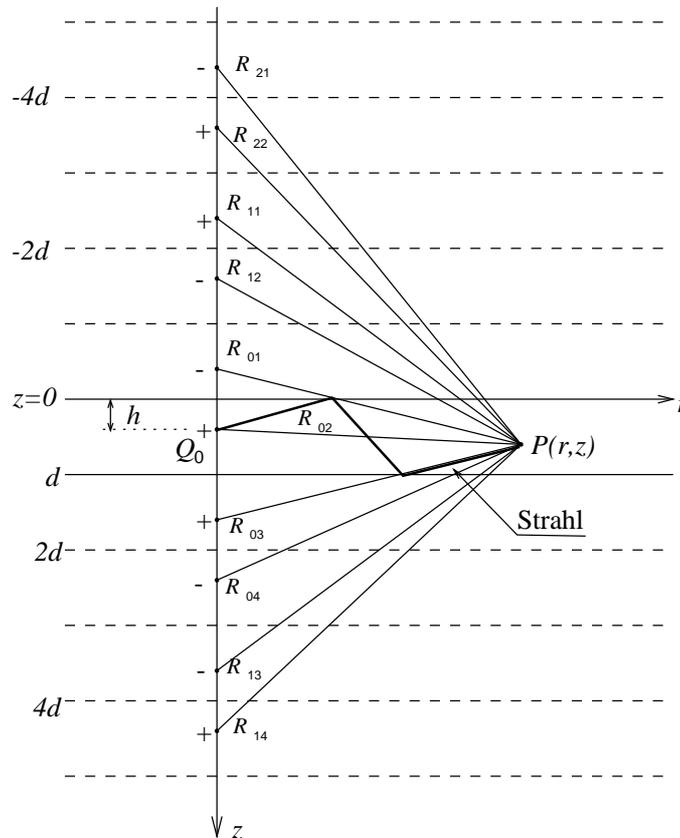
Betrachten wir analog die Reflexion der Kugelwelle von Q_0 an der Trennfläche $z = d$, so lautet das Potential der dort reflektierten Welle

$$\Phi_2 = \frac{1}{R_2} F\left(t - \frac{R_2}{\alpha}\right), \quad (4.61)$$

wobei R_2 nun von einer neuen Bildquelle mit der z -Koordinate $d + (d - h) = 2d - h$ aus zu messen ist. dass $\Phi_0 + \Phi_2$ die Randbedingung $\partial(\Phi_0 + \Phi_2)/\partial z = 0$ für $z = d$ befriedigt (verschwindende Normalverschiebung), sieht man leicht, denn für Punkte in dieser Trennfläche ist:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_2 \\ \frac{\partial R_0}{\partial z} &= \frac{z - h}{R_0} \Big|_{z=d} = \frac{d - h}{R_0} \\ \frac{\partial R_2}{\partial z} &= -\frac{2d - h - z}{R_2} \Big|_{z=d} = -\frac{d - h}{R_2} = -\frac{\partial R_0}{\partial z} \end{aligned}$$

Mit den bis jetzt betrachteten beiden ersten Reflexionen der Kugelwelle von Q_0 an der Trennflächen des Wellenleiters lassen sich die Randbedingungen nur für gewisse Zeiten befriedigen, nämlich nur so lange, bis die Reflexionen Φ_1 und Φ_2 die jeweils gegenüberliegende Wand erreicht haben. Da sie aber von derselben Bauart wie Φ_0 sind, lassen sich die weiteren Reflexionen leicht nach demselben Schema behandeln. Jede Reflexion und Mehrfachreflexion scheint von einer Bildquelle herzukommen, die durch fortgesetzte Spiegelung von Q_0 an den Wänden entstanden ist. Das Vorzeichen des zugehörigen Potentials ist negativ, wenn die Zahl der Reflexion an der Oberfläche ungerade ist, sonst positiv.



Jede Bildquelle entspricht einem *Strahl* von der Quelle zum Aufpunkt, der eine bestimmte Anzahl von Reflexionen erlitten hat. Der Strahlbegriff ist ohne Schwierigkeit zu verallgemeinern für *feste*

Medien (unter Einschluss von S-Wellen), nicht jedoch der Begriff Bildquell. Daher sprechen wir allgemein und auch im vorliegenden Fall von einer *Strahldarstellung des Wellenfeldes*. Sie lautet hier:

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j & \left[-\frac{1}{R_{j1}} F\left(t - \frac{R_{j1}}{\alpha}\right) + \frac{1}{R_{j2}} F\left(t - \frac{R_{j2}}{\alpha}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{R_{j3}} F\left(t - \frac{R_{j3}}{\alpha}\right) - \frac{1}{R_{j4}} F\left(t - \frac{R_{j4}}{\alpha}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} R_{j1}^2 &= (2jd + h + z)^2 + r^2 \\ R_{j2}^2 &= (2jd - h + z)^2 + r^2 \\ R_{j3}^2 &= (2(j+1)d - h - z)^2 + r^2 \\ R_{j4}^2 &= (2(j+1)d + h - z)^2 + r^2 \end{aligned}$$

Wirklich von Null verschieden sind in (4.62) nur die Terme, deren Argument positiv ist, vorausgesetzt, $F(t)$ geht bei $t = 0$ zu nicht verschwindenden Werte über. Die Zahl dieser Terme ist endlich und wächst mit t .

Beim idealen Wellenleiter ist die Berechnung des Beitrags eines Strahls sehr einfach, da er das gleiche zeitliche Gesetz wie die anregende Kugelwelle hat. Bei anderen Wellenleitern muss man hierzu Methoden wie die von Abschnitt 3.8 benutzen. Dabei ist der numerische Aufwand viel größer. Er lohnt sich nur, wenn nicht zu viele Strahlen aufsummiert werden müssen. Gerade das ist aber bei großen horizontalen Abständen von der Quelle notwendig, wo die Laufwege von vielen Strahlen annähernd gleich werden. In diesem Fall ist die Darstellung des Wellenfeldes als Summe von (zumeist wenigen) Normalmoden *erheblich günstiger*. Die Strahldarstellung eignet sich für das Feld in solchen Entfernungen von der Quelle, wo sich die typischen Normalmoden-Eigenschaften *noch nicht* herausgebildet haben.

Abschließend zeigen wir noch, dass tatsächlich (4.62) für $F(t) = e^{i\omega t}$ und (4.39) bzw. (4.40) *zwei verschiedene Darstellungen desselben Feldes* sind. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall $h \leq z \leq d$. Setzt man $F(t) = e^{i\omega t}$ in (4.62) ein und benutzt für jeden Term das Sommerfeldintegral (3.85) für eine Kugelwelle, so erhält man bei Unterdrückung des Faktors $e^{i\omega t}$:

$$\begin{aligned} \Phi = \int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{k}{il} & \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j [-\exp(-il|2jd + h + z|) \\ & + \exp(-il|2jd - h + z|) \\ & + \exp(-il|2(j+1)d - h - z|) \\ & - \exp(-il|2(j+1)d + h - z|)] dk. \end{aligned}$$

Wenn $z \geq h$ ist, sind die Beträge *überall* gleich den Argumenten. Dann zieht man $\exp(-i2lj d)$ heraus:

$$\begin{aligned} \Phi = \int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{k}{il} & \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-e^{-2ild})^j \right] [-\exp(-il(h+z)) \\ & + \exp(-il(h-z)) \\ & + \exp(-il(2d-h-z)) \\ & - \exp(il(2d+h-z))] dk. \end{aligned}$$

Die Reihe in der ersten eckigen Klammer hat die Summe $1/(1 + e^{-2ild})$. Aus der zweiten eckigen Klammer zieht man e^{-ild} heraus und erhält:

$$\Phi = \int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{k}{2il \cos(ld)} [-\exp(il(d-h-z))$$

$$\begin{aligned}
& + \exp(il(d+h-z)) \\
& + \exp(-il(d-h-z)) \\
& - \exp(-il(d+h-z))] dk
\end{aligned}$$

Die verbleibende eckige Klammer ist gleich

$$-2i \sin[l(d-h-z)] + 2i \sin[l(d+h-z)] = 4i \cos[l(d-z)] \sin(lh).$$

Damit wird

$$\Phi = 2 \int_0^\infty J_0(kr) \frac{k \cos[l(d-z)] \sin(lh)}{\cos(ld)} dk \quad (4.63)$$

und stimmt mit (4.40) überein.

Vertauscht man Quelle und Aufpunkt, so bleibt in (4.62) das Potential des Einzelstrahls unverändert, da es nur vom Laufweg abhängt. Daher erhält man auch aus (4.63) durch Vertauschen von z und h das Potential für $0 \leq z \leq h$. Das führt auf (4.39). Damit ist der Beweis der Identität von (4.62) (für $F(t) = e^{i\omega t}$) und (4.39) bzw. (4.40) vollständig.

Abschließend sei wiederholt (vgl. S. 115), dass eine Darstellung des Wellenfeldes *allein durch Normalmode* nur bei idealen Wellenleitern möglich ist, deren obere und untere Begrenzung für alle Einfallswinkel total reflektiert. In anderen Medien gilt es außer den Normalmoden noch andere Anteile (Raumwellenanteile, verlustbehaftete Moden), die nicht auf Polbeiträge in der komplexen Wellenzahlebene zurückgehen.

Übung 4.7

Man untersuche die Polarisation des Verschiebungsvektors der zweiten freien Normalmode des idealen Wellenleiters ($n=2$ in (4.48)) als Funktion der Tiefe.

Übung 4.8

Eine Explosions-Punktquelle befinde sich in der Tiefe h unterhalb der freien Oberfläche eines flüssigen Halbraums. Das Verschiebungspotential Φ ist die Summe der Potentials (4.59) der direkten Welle und (4.60) der Reflexion. Man gebe eine Näherung für Φ an, die unter folgende Voraussetzungen gilt:

- a) die dominierende Periode der Anregungsfunktion $F(t)$ ist viel größer als die Laufzeit h/α von der Quelle zur Oberfläche,
- b) die Entfernung zum Aufpunkt ist viel größer als h .

Man führe Kugelkoordinaten R und ϑ , bezogen auf den Punkt $r = 0, z = 0$ ein (vgl. Skizze auf S.121).

Wie lautet das Ergebnis, wenn die Oberfläche nicht frei ist, sondern starr?

Anhang A

Laplace-Transformation und Deltafunktion

A.1 Einführung in die Laplace-Transformation

A.1.1 Literatur

Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplacetransformation und der Z-Transformation, Oldenbourg, München, 1985

Spiegel, M.R.: Laplace Transformation, Schaum, New York, 1977

Doetsch, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Birkhäuser, Basel, 1976

Doetsch, G.: Handbuch der Laplacetransformation I, II, III, Birkhäuser, Basel, 1971, 1973

A.1.2 Was macht die Laplace-Transformation?

Sie ordnet einer Funktion $F(t)$ eine andere Funktion $f(s)$ zu oder transformiert die Funktion $F(t)$ in eine andere Funktion $f(s)$:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = L\{F(t)\}$$

$$F(t) = \text{Originalfunktion}$$

$$f(s) = \text{Bildfunktion (Laplace - Transformierte, abgekürzte Transformierte)}$$

Symbolische Schreibweise: $f(s) \bullet \text{---} \circ F(t)$ ($\bullet \text{---} \circ =$ Zuordnungszeichen)

$$t = \text{reelle Variable (oft Zeit)}$$

$$s = \sigma + i\omega \text{ komplexe Variable}$$

A.1.3 Annahmen über $F(t)$

a) Normalerweise reelle Funktion

b) $F(t) \equiv 0$ für $t < 0$ (erfüllt für viele physikalische Größen)

c) $F(t)$ soll im Intervall $[0, T]$ integrierbar sein, und für $t > T$ soll sein:

$$|F(t)| < e^{\gamma t} \text{ mit reellem } \gamma$$

Das sind hinreichende Bedingungen für die Existenz der L-Transformierten $f(s)$ von $F(t)$ für komplexe s mit $\operatorname{Re} s > \gamma$ (Konvergenzhalbebene). Sämtliche beschränkten Funktionen wie z.B. $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$), $\sin \beta t$ etc. haben eine L-Transformierte, aber auch nicht beschränkte Funktionen wie $t^{-1/2}$, t^n und $e^{\alpha t}$ ($n, \alpha > 0$). Man beachte hierbei die Bedingung b). Viele in der Physik auftretende Funktionen haben also eine L-Transformierte. Keine L-Transformierte haben z.B. die Funktionen t^{-1} und e^{t^2} .

A.1.4 Beispiele

a)

$$\begin{aligned} F(t) &= H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \text{ Heavisidesche Sprungfunktion (Einheitssprung)} \\ f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \text{ für } \operatorname{Re} s > 0 \text{ (Konvergenzhalbebene)} \\ H(t) &\circ\text{---}\bullet \frac{1}{s} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} F(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{\delta t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \\ f(s) &= \int_0^\infty e^{-(s-\delta)t} dt = -\frac{1}{s-\delta} e^{-(s-\delta)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-\delta}, \quad \operatorname{Re} s > \delta \\ e^{\delta t} &\circ\text{---}\bullet \frac{1}{s-\delta} \end{aligned}$$

Für $\delta = 0$ Übergang in die L-Transformation von $H(t)$.

c)

$$\frac{\sin at}{a} \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s^2 + a^2}$$

Es gibt umfangreiche Tabellen solcher Korrespondenzen, z.B. in der "Anleitung ..." von Doetsch oder im Buch von Spiegel.

A.1.5 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Ähnlichkeitssatz: $a > 0$

$$F(at) \circ\text{---}\bullet \int_0^\infty e^{-st} F(at) dt = \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} F(\tau) \frac{d(at)}{a} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} F(\tau) d\tau$$

Damit:

$$F(at) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\text{A.1})$$

Man braucht also nur die L-Transformierte von $F(t)$ zu kennen.

Beispiel: Nach Abschnitt A.1.4 ist

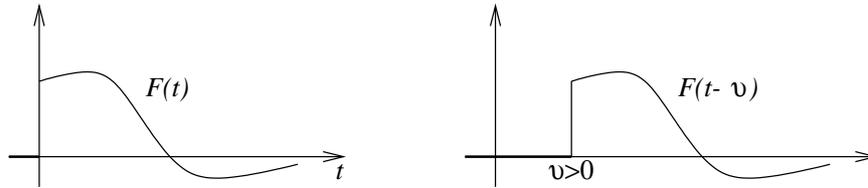
$$e^t \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s-1}.$$

Mit dem Ähnlichkeitssatz erhält man hieraus

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{a} \frac{1}{\frac{s}{a} - 1} = \frac{1}{s - a},$$

d.h. das Resultat der direkten Berechnung in Abschnitt A.1.4.

Verschiebungssatz:



$$\begin{aligned} F(t - \vartheta) &\circ \bullet \int_0^\infty e^{-st} F(t - \vartheta) dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau + \vartheta)} F(\tau) d\tau = e^{-\vartheta s} f(s) \\ F(t - \vartheta) &\circ \bullet e^{-\vartheta s} f(s) \end{aligned} \tag{A.2}$$

Dämpfungssatz: α beliebig komplex

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} F(t) &\circ \bullet \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t} F(t) dt = f(s + \alpha) \\ e^{-\alpha t} F(t) &\circ \bullet f(s + \alpha) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Differentiationssatz:

$$F'(t) \circ \bullet \int_0^\infty e^{-st} F'(t) dt = e^{-st} F(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

Der erste Term verschwindet an der oberen Grenze infolge der Annahme c) aus Abschnitt A.1.3. Somit gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &\circ \bullet sf(s) - F(+0) \\ F(+0) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} (F(t) \text{ ist der Grenzwert von rechts.}) \end{aligned} \tag{A.4}$$

Verallgemeinerung:

$$\left. \begin{aligned} F'(t) &\circ \bullet sf(s) - F(+0) \\ F''(t) &\circ \bullet s^2 f(s) - sF(+0) - F'(+0) \\ &\vdots \\ F^{(n)}(t) &\circ \bullet s^n f(s) - s^{n-1} F(+0) - s^{n-2} F'(+0) \\ &\quad - \dots - sF^{(n-2)}(+0) - F^{(n-1)}(+0) \end{aligned} \right\} \tag{A.5}$$

Integrationsatz:

$$G(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} f(s) \tag{A.6}$$

Dem hieraus folgt:

$$G'(t) = F(t) \circ \bullet f(s) - G(+0) = f(s)$$

Faltungssatz:

$$\int_0^t F_1(\tau)F_2(t-\tau)d\tau \circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet f_1(s)f_2(s) \quad (\text{A.7})$$

Das Integral heißt “die Faltung von F_1 mit F_2 ”, symbolisch $F_1 * F_2$. Es gilt noch

$$\int_0^t F_1(\tau)F_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)d\tau$$

oder

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1,$$

d.h., die Faltung ist kommutativ.

Weitere elementare Eigenschaften der L-Transformation sind, dass sie erstens homogen und linear ist, dass also gilt

$$a_1 F_1(t) + a_2 F_2(t) \circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet a_1 f_1(s) + a_2 f_2(s),$$

und dass zweitens aus $F(t) \equiv 0 \iff f(s) \equiv 0$ folgt und umgekehrt.

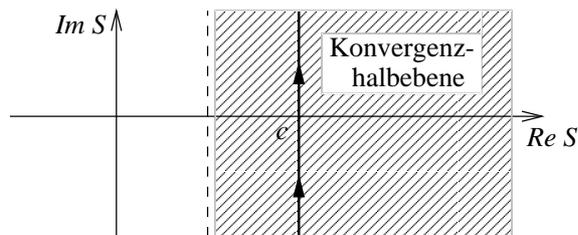
Eine wichtige Eigenschaft, die aus der Definition der L-Transformierten folgt, ist

$$\lim_{\text{Re } s \rightarrow +\infty} f(s) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Nur *dann* ist eine Funktion $f(s)$ eine L-Transformierte und kann zurücktransformiert werden (siehe den nächsten Abschnitt).

A.1.6 Rücktransformation

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts} f(s) ds \quad (\text{A.9})$$



Der Integrationsweg ist parallel zur imaginären Achse und muss in der Konvergenzhalbebene von $f(s)$ verlaufen. Sonst ist c beliebig. Rechts vom Integrationsweg darf $f(s)$ also keine Singularitäten haben, wohl aber links. Der Integrationsweg kann im Einklang mit dem Cauchyschen Integralsatz oder dem Residuensatz deformiert werden.

A.1.7 Zusammenhang mit der Fourier-Transformation

Eine gebräuchliche Darstellung der Fourier-Transformierten $\overline{F}(\omega)$ einer Funktion $F(t)$ ist

$$\overline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{A.10})$$

$\overline{F}(\omega)$ heißt auch *komplexes Spektrum* von $F(t)$; ω ist die Kreisfrequenz. Die Rücktransformation erfolgt nach der Gleichung

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{A.11})$$

Diese Gleichung lässt sich anschaulich interpretieren als Superposition harmonischer Schwingungen. Das ist der Grund, warum man in der Physik häufig mit der Fourier-Transformation arbeitet. Kennt man nämlich das Verhalten eines Systems, das linearen Differentialgleichungen gehorcht, bei zeitlich harmonischer Anregung, so kann man hieraus das Verhalten bei Impulsanregung über (A.11) berechnen. Man zerlegt hierzu die Anregung spektral nach (A.10), löst das Problem für jede Spektralkomponente und superponiert anschließend die spektralen Lösungen nach (A.11). Diese Methode wird z.B. in Abschnitt 3.6.3 zur Untersuchung der Reflexion von impulshaften Wellen an einer Trennfläche benutzt.

Weniger anschaulich, aber oft eleganter und einfacher ist es, mit der L-Transformation zu arbeiten. Der Zusammenhang zwischen $\overline{F}(\omega)$ und $f(s)$ ist für Funktionen $F(t)$, die für $t < 0$ verschwinden, sehr eng:

$$\overline{F}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt = f(i\omega)$$

Die Fourier-Transformierte ist also die L-Transformierte auf der imaginären Achse der komplexen s-Ebene.

Bei einer anderen Darstellung der Fourier-Transformierten taucht der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ nicht in (A.11) sondern in (A.10) auf. Die so definierte Fourier-Transformierte $\overline{F}(\omega)$ ist gleich $f(i\omega)/2\pi$.

A.2 Anwendung der Laplace-Transformation

A.2.1 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} L(Y) &= Y^{(n)} + a_{n-1}Y^{(n-1)} + a_{n-2}Y^{(n-2)} + \dots + a_1Y' + a_0Y = F(t) \\ F(t) &\equiv 0 \text{ für } t < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Anfangsbedingungen:

$$Y(+0) = Y_0, Y'(+0) = Y'_0, \dots, Y^{(n-1)}(+0) = Y_0^{(n-1)}$$

L-Transformation von (A.12) mit $Y(t) \circ \bullet y(s)$, $F(t) \circ \bullet f(s)$ und (A.5):

$$\begin{aligned} (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0) y(s) &= f(s) \\ &+ (s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s + a_1) Y_0 \\ &+ (s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_3s + a_2) Y'_0 \\ &+ \dots \\ &+ (s + a_{n-1}) Y_0^{n-2} \\ &+ Y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Die auftretenden Polynome kann man wie folgt schreiben:

$$p_i(s) = \sum_{k=0}^{n-i} a_{k+i} s^k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad a_n = 1$$

Damit:

$$y(s) = \frac{f(s)}{p_0(s)} + \sum_{l=1}^n \frac{p_l(s)}{p_0(s)} Y_0(l-1) \quad (\text{A.13})$$

Die rechte Seite enthält die L-Transformierte der bekannten Funktion $F(t)$, einige Polynome, deren Koeffizienten bekannt sind, und die bekannten Anfangswerte der gesuchten Funktion $Y(t)$. Wenn es gelingt, die inverse Transformierte der rechten Seite von (A.13) zu bestimmen, so ist das Problem gelöst. Im vorliegenden Fall ist das nicht schwierig. Vorher diskutieren wir den Vergleich mit der üblichen Methode zur Lösung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Hierbei löst man zunächst die homogene Differentialgleichung allgemein (sie enthält also unbestimmte Konstanten) sucht dann eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (z.B. durch Raten oder Variation der Konstanten), hat hiermit also die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gefunden und bestimmt dann aus den Anfangsbedingungen die n Konstanten. Der Umweg über die allgemeine Lösung kommt bei Verwendung der L-Transformation nicht vor. Hier wird direkt *die* Lösung bestimmt, die den Anfangsbedingungen entspricht. Das ist der große Vorteil dieser Methode. In noch stärkerem Maße macht sich dieser Vorteil bei der Lösung partieller Differentialgleichungen mit Rand- und Anfangsbedingungen bemerkbar. Daher wird die L-Transformation heute viel benutzt. Das gilt besonders für die Elektrotechnik. Eine Folge davon ist, dass bereits umfangreiche Tabellen mit Korrespondenzen existieren, in denen man die inversen Transformierten zu viele L-Transformierten findet.

Die Rücktransformation von (A.13) kann man in zwei Schritte aufspalten (man muss es aber nicht):

1. $f(s) \neq 0$, $Y_0 = Y_0' = \dots = Y_0^{(n-1)} = 0$. Das entspricht der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit verschwindenden Anfangswerten. Siehe Abschnitt A.2.1.
2. $f(s) = 0$, Anfangswerte $\neq 0$. Das entspricht der Lösung der homogenen Differentialgleichung mit nicht verschwindenden Anfangswerten. Siehe Abschnitt A.2.1.

Die Summe der Lösungen von 1. und 2. ist die gesuchte inverse Transformation von (A.13). Siehe Abschnitt A.2.1.

A.2.1.1 Inhomogene Differentialgleichungen mit verschwindenden Anfangswerten

Dieser Fall ist auch von praktischem Interesse, da in vielen Fällen, in denen ein System bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist (d.h., $Y(t) \equiv 0$ für $t < 0$), die Anfangswerte tatsächlich verschwinden. In diesem Fall ist

$$y(s) = \frac{f(s)}{p_0(s)}.$$

Da $1/p_0(s)$ für $n \geq 1$ immer eine L-Transformierte ist (vgl. (A.8)), so existiert eine Inverse:

$$\frac{1}{p_0(s)} \bullet \circ Q(t)$$

$Q(t)$ heißt die *Greensche Funktion* des Problems. Der Faltungssatz (A.7) ergibt dann die Lösung $Y(t)$:

$$Y(t) = \int_0^t F(t-\tau)Q(\tau)d\tau = \int_0^t F(\tau)Q(t-\tau)d\tau \quad (\text{A.14})$$

Die Bestimmung von $Q(t)$ ist also die verbleibende Aufgabe. Hierzu machen wir eine Partialbruchzerlegung von $1/p_0(s)$ unter der Annahme, die Nullstellen α_k von $p_0(s)$ seien alle *verschieden*:

$$\frac{1}{p_0(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{s - \alpha_k}$$

d_k ist das Residuum von $1/p_0(s)$ an der Stelle α_k :

$$d_k = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{s - \alpha_k}{p_0(s)} = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{1}{\frac{p_0(s) - p_0(\alpha_k)}{s - \alpha_k}} = \frac{1}{p_0'(\alpha_k)}$$

Damit:

$$\frac{1}{p_0(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_0'(\alpha_k)} \cdot \frac{1}{s - \alpha_k}$$

Rücktransformation mit einem Ergebnis aus Abschnitt A.1.4:

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{\alpha_k t}}{p_0'(\alpha_k)} \quad (\text{A.15})$$

Wenn α_k reell ist, ist der entsprechende Summand in $Q(t)$ ebenfalls reell. Ist α_k komplex, so ergibt es unter den anderen Nullstellen ein α_1 mit $\alpha_1 = \bar{\alpha}_k$ (zu α_k konjugiert komplexer Wert), denn $p_0(s)$ hat reelle Koeffizienten. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha_k t}}{p_0'(\alpha_k)} + \frac{e^{\bar{\alpha}_k t}}{p_0'(\bar{\alpha}_k)} &= \frac{e^{\alpha_k t}}{p_0'(\alpha_k)} + \frac{e^{\bar{\alpha}_k t}}{p_0'(\alpha_k)} \\ &= \frac{e^{\alpha_k t}}{p_0'(\alpha_k)} + \overline{\left(\frac{e^{\alpha_k t}}{p_0'(\alpha_k)} \right)} = 2 \operatorname{Re} \frac{e^{\alpha_k t}}{p_0'(\alpha_k)}. \end{aligned}$$

$Q(t)$ ist also immer reell.

Beziehung zur üblichen Lösungsmethode: Das Auffinden der Nullstellen von $p_0(s)$ ist völlig identisch mit der Nullstellenbestimmung für die sogenannte charakteristische Gleichung $p_0(\lambda) = 0$ der homogenen Differentialgleichung. Der Arbeitsaufwand ist also derselbe. Bei der üblichen Methode kommt aber noch das Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und die Bestimmung der n Konstanten in der Lösung der homogenen Differentialgleichung aus den verschwindenden Anfangswerte hinzu.

Es interessiert noch, unter welcher Voraussetzung über $F(t)$ die Anfangswerte der Lösung

$$Y(t) = \int_0^t F(\tau) Q(t - \tau) d\tau$$

tatsächlich verschwinden. Man kann zeigen, dass

$$Q^{(k)}(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{k+1}}{p_0(s)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

und damit

$$Q(+0) = Q'(+0) = \dots = Q^{(n-2)}(+0) = 0, \quad Q^{(n-1)}(+0) = 1$$

ist. Benutzt man dies beim Differenzieren von $Y(t)$, so erkennt man, dass

$$Y(+0) = Y'(+0) = \dots = Y^{(n-2)}(+0) = 0$$

und unter der Voraussetzung

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_0^t F(\tau) d\tau = 0 \quad (\text{A.16})$$

auch $Y^{(n-1)}(+0)$ ist. Das heißt: Da physikalisch realisierbare Funktionen (A.16) i.a. erfüllen (sofern sie einen definierten Beginn haben), ist die Annahme über das Verschwinden der Anfangswerte zumeist berechtigt. (A.14) mit (A.15) ist dann die Lösung des Problems. Eine Ausnahme findet sich in der Übung A.2.1.

Anwendungsbeispiel:

Differentialgleichung des mechanischen Schwingers:

$$\ddot{Y} + 2\alpha\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = \frac{1}{m}K(t)$$

- $Y(t)$ = Verschiebung aus der Ruhelage
 $K(t)$ = wirkende Kraft
 m = Masse
 α = Dämpfungsmass ($\alpha = 1$: aperiodischer Grenzfall)
 ω_0 = Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingers
 ω = $\omega_0(1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$ Eigenfrequenz des gedämpften Schwingers

Es sei $\alpha < 1$ (*Schwingfall*):

L-Transformation der Differentialgleichung führt auf:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= \frac{k(s)}{mp_0(s)} \\
 p_0(s) &= s^2 + 2\alpha\omega_0 s + \omega_0^2 = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \\
 \alpha_1 &= -\omega_0 \left(\alpha + i(1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right) = -\alpha\omega_0 - i\omega \\
 \alpha_2 &= -\alpha\omega_0 + i\omega \\
 p'_0(s) &= 2s + 2\alpha\omega_0 \\
 p'_0(\alpha_1) &= -2i\omega = -p'_0(\alpha_2)
 \end{aligned}$$

Damit wird die Greensche Funktion:

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= \frac{1}{2i\omega} [-e^{-\alpha\omega_0 t - i\omega t} + e^{-\alpha\omega_0 t + i\omega t}] \\
 &= \frac{e^{-\alpha\omega_0 t}}{2i\omega} [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] \\
 Q(t) &= \frac{1}{\omega} e^{-\alpha\omega_0 t} \sin \omega t \\
 Q(+0) &= 0, \quad Q'(+0) = 1
 \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet also:

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= \frac{1}{\omega m} \int_0^t K(t - \tau) e^{-\alpha\omega_0 \tau} \sin \omega \tau d\tau \\
 &= \frac{1}{\omega m} \int_0^t K(\tau) e^{-\alpha\omega_0(t - \tau)} \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.17})
 \end{aligned}$$

Hat Polynom $p_0(s)$ mehrfache Nullstellen, so gibt es ebenfalls eine Partialbruchzerlegung von $1/p_0(s)$, die aber etwas anders aussieht, als wenn nur einfache Nullstellen vorliegen. Dementsprechend sieht auch die zugehörige Greensche Funktion $Q(t)$ anders aus (vgl. auch die übliche Lösungsmethode). (A.14) gilt auch in diesem Fall.

Übung A.1

Man gebe die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$L(Y) = \omega_0^2 Y_0 H(t)$$

an, wo $H(t)$ die Heavisidesche Sprungfunktion ist.

Übung A.2

Man löse die Differentialgleichung des mechanischen Seismographen

$$L(Y) = -\ddot{X} \quad (X(t) = \text{Bodenbewegung})$$

mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten und mit der L-Transformation. Es sei:

$$X(t) \equiv 0 \text{ für } t < 0, \quad X(+0) = 0, \quad \dot{X}(+0) = V_0$$

Man leite die Anfangsbedingungen für $Y(t)$ aus physikalischen Prinzipien ab und zeige: $Y(+0) = 0$, $\dot{Y}(+0) = -V_0$.

Im beiden Übungen ist $L(Y) = \ddot{Y} + 2\alpha\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2Y$, $\alpha < 1$.

A.2.1.2 Homogene Differentialgleichungen mit beliebigen Anfangswerten

Auch dieser Fall hat eine eigenständige praktische Bedeutung, da er *Ausschwingungsvorgänge* physikalischer Systeme beschreibt. Das wesentliche kann man lernen an der

Übung A.3

Man löse die Differentialgleichung der Eigenschwingungen eines mechanischen Schwingers

$$L(Y) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $Y(+0) = Y_0$, $\dot{Y}(+0) = 0$ mit Hilfe der L-Transformation und vergleiche die Lösung mit der Lösung von Übung A.2.1. $L(Y)$ wie oben.

A.2.1.3 Inhomogene Differentialgleichungen mit beliebigen Anfangswerten

Superposition von A.2.1 und A.2.1 (vgl.S.130). Das heißt, $Y(t)$ besteht aus zwei Anteilen:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$$

$Y_1(t)$ ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung, die die gegebenen Anfangsbedingung erfüllt:

$$Y_1(+0) = Y_0, \quad Y_1'(+0) = Y_0', \dots, Y_1^{(n-1)}(+0) = Y_0^{(n-1)}$$

$Y_2(t)$ ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit verschwindenden Anfangswerten:

$$Y_2(+0) = Y_2'(+0) = \dots = Y_2^{(n-1)}(+0) = 0$$

$Y(t)$ erfüllt die Differentialgleichung und die gegebenen Anfangsbedingungen, ist also die Lösung des Problems.

Bei physikalischen Problemen müssen die Anfangsbedingungen *grundsätzlich* aus physikalischen Prinzipien abgeleitet werden.

Beispiele:

a) Mechanischer Schwinger: $\ddot{Y} + 2\alpha\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2Y = \frac{1}{m}K(t)$

Für $t < 0$ sei $Y = Y_0(t)$ vorgegeben. Zur Zeit $t = 0$ beginnt die Kraft $K(t)$ zu wirken. *Aus Stetigkeitsgründen* muss dann sein:

$$Y(+0) = Y_0(-0), \quad \dot{Y}(+0) = \dot{Y}_0(-0) \tag{A.18}$$

Der Schwinger verlässt den Zeitpunkt $t = 0$ mit den Anfangswerten, die stetig an die entsprechenden Werte der Vergangenheit anschließen. Der Anteil $Y_1(t)$ an der Verschiebung $Y(t)$ hat die Anfangswerte (A.18) und ist damit eine Eigenschwingung, die die Schwingung $Y_0(t)$ fortsetzt.

Ihr überlagert sich die erzwungene Schwingung $Y_2(t)$, die in (A.17) angegeben ist und deren Anfangswerte verschwinden.

b) Mechanischer Seismograph: $\ddot{Y} + 2\alpha\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\ddot{X}$

Der Boden sei bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe. Aus *Stetigkeitsgründen* muss dann sein:

$$Y(+0) = 0, \dot{Y}(+0) = -\dot{X}(+0)$$

Homogene Gleichung:

$$\ddot{Y}_1 + 2\alpha\omega_0\dot{Y}_1 + \omega_0^2 Y_1 = 0, Y_1(+0) = 0, \dot{Y}_1(+0) = -\dot{X}(+0)$$

L-Transformation:

$$(s^2 + 2\alpha\omega_0 s + \omega_0^2) Y_1(s) = -\dot{X}(+0)$$

Analog zu S.132 erhält man die Eigenschwingung:

$$Y_1(t) = -\frac{\dot{X}(+0)}{\omega} e^{-\alpha\omega_0 t} \sin \omega t$$

Inhomogene Gleichung:

$$\ddot{Y}_2 + 2\alpha\omega_0\dot{Y}_2 + \omega_0^2 Y_2 = -\ddot{X}, Y_2(+0) = \dot{Y}_2(+0) = 0$$

L-Transformation:

$$(s^2 + 2\alpha\omega_0 s + \omega_0^2) Y_2(s) = -\left(s^2 x(s) - \dot{X}(+0)\right)$$

Die erzwungene Schwingung lautet also:

$$Y_2(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t \ddot{X}(\tau) e^{-\alpha\omega_0(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

Die gesamte Lösung $Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$ ist dieselbe wie in Übung A.2.1.

A.2.2 Partielle Differentialgleichungen

Wir behandeln nur ein Beispiel, an dem man alles wesentliche erkennen kann. Wir wollen die Ausbreitung von Kompressionswellen von einer Explosions-Punktquelle auf eine andere Weise als in Abschnitt 3.4 im Hauptteil untersuchen. Der Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung des elastischen Kontinuums ohne Volumenkräfte:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} \quad (\text{A.19})$$

(ρ =Dichte, λ und μ =Lamésche Parameter)

In unserem Problem, für das wir Kugelkoordinaten benutzen, hat die Verschiebung \vec{u} nur eine Radikalkomponente U , und die einzige Raumkoordinate ist der Abstand r von der Explosionspunktquelle. In diesem Fall verschwindet $\text{rot } \vec{u}$, und es ist:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{u} &= \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2}{r} U \\ \text{grad div } \vec{u} &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

Mit $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ (=Geschwindigkeit von Kompressionswellen) erhält man aus (A.19):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.20})$$

Als *Randbedingung* nehmen wir an, dass für $r = r_1$ die Verschiebung vorgeschrieben ist:

$$U(r_1, t) = U_1(t) \quad (\text{A.21})$$

Die *Anfangsbedingungen* seien:

$$U(r, 0) = \frac{\partial U}{\partial t}(r, 0) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$U_1(t)$, das für $t < 0$ verschwinden soll, muss so sanft starten, dass die Anfangsbedingungen auch für $r = r_1$ erfüllt sind.

L-Transformation:

$$\begin{aligned} u(r, s) &= \int_0^\infty e^{-st} U(r, t) dt \\ u_1(s) &= \int_0^\infty e^{-st} U_1(t) dt \\ L \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} \right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial U}{\partial r} dt = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty e^{-st} U dt = \frac{\partial}{\partial r} u(r, s) \\ L \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, s) \end{aligned}$$

Hiermit und mit (A.20) erhält man aus (A.20) eine *gewöhnliche* Differentialgleichung für $u(r, s)$:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \left(\frac{2}{r^2} + \frac{s^2}{\alpha^2} \right) u = 0 \quad (\text{A.23})$$

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen führt die L-Transformation auf algebraische Gleichungen. Bei partiellen Differentialgleichungen, in denen neben t nur *eine* andere Koordinate auftritt (wie im vorliegenden Fall), führt die L-Transformation auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Bei partiellen Differentialgleichungen, in denen neben t *mehr als eine* weitere Koordinate auftritt, erhält man ebenfalls partielle Differentialgleichungen. In jedem Fall ist jedoch die t -Abhängigkeit eliminiert.

Variablenwechsel in (A.23): $x = \frac{rs}{\alpha}$

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{s}{\alpha}, \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{s^2}{\alpha^2}$$

Damit wird (A.23):

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} - (x^2 + 2) u = 0 \quad (\text{A.24})$$

Das ist ein Spezialfall der Differentialgleichung der *modifizierten sphärischen Besselfunktion*

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n(n+1)) y = 0$$

(vgl. z.B. das auf S.226 zitierte Buch von Abramowitz und Stegun).

In unserem Fall ist $n = 1$, und die Lösung von (A.24), die die Eigenschaft (A.8) von L-Transformierten hat, ist

$$u(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x} \cdot F(s), \quad x = \frac{rs}{\alpha} \quad (\text{A.25})$$

Der Einschluss der Integrationskonstanten $F(s)$ ist wichtig, wie das Folgende zeigen wird. Nun spezifizieren wir (A.25) für $r = r_1$, d.h., $x = r_1 s / \alpha$, wodurch $u(x)$ in die bekannte L-Transformierte $u_1(s)$ der am Rand $r = r_1$ gegebenen Verschiebung $U_1(t)$ übergehen muss (s. (A.21)):

$$u_1(s) = \frac{\alpha}{r_1 s} \left(1 + \frac{\alpha}{r_1 s} \right) e^{-\frac{r_1 s}{\alpha}} F(s)$$

Hieraus folgt $F(s)$. Damit wird (A.25):

$$\begin{aligned} u(r, s) &= \frac{r_1}{r} \frac{1 + \frac{\alpha}{rs}}{1 + \frac{\alpha}{r_1 s}} e^{-\frac{r-r_1}{\alpha} s} u_1(s) \\ &= \frac{r_1}{r} \cdot \left[\frac{s + \frac{\alpha}{r_1} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r_1}}{s + \frac{\alpha}{r_1}} u_1(s) \right] \cdot e^{-\frac{r-r_1}{\alpha} s} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$u_1(s) + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{u_1(s)}{s + \frac{\alpha}{r_1}} \bullet \circ U_1(t) + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) U_1(t) * e^{-\frac{\alpha}{r_1} t}$$

Beim letzten Schritt wurde der Faltungssatz (A.7) angewandt. Benutzt man noch den Verschiebungssatz (A.2), so erhält man als inverse Transformierte von (A.26):

$$U(r, t) = \frac{r_1}{r} \left[U_1 \left(t - \frac{r-r_1}{\alpha} \right) + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \int_0^{t - \frac{r-r_1}{\alpha}} U_1(\vartheta) e^{-\frac{\alpha}{r_1} (t - \frac{r-r_1}{\alpha} - \vartheta)} d\vartheta \right]$$

Die Retardierung $(r-r_1)/\alpha$ bezieht sich im vorliegenden Fall nicht auf die Explosion-Punktquelle, sondern auf $r = r_1$, von der die Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ startet. Die retardierte Zeit ist also $\tau = t - (r-r_1)/\alpha$, und die Ankunft der Welle an jedem Aufpunkt mit $r > r_1$ folgt aus $\tau = 0$. Dann ist

$$U(r, \tau) = \frac{r_1}{r} \left[U_1(\tau) + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \int_0^\tau U_1(\vartheta) e^{-\frac{\alpha}{r_1} (\tau - \vartheta)} d\vartheta \right].$$

A.3 Die Deltafunktion $\delta(t)$

A.3.1 Einführung von $\delta(t)$

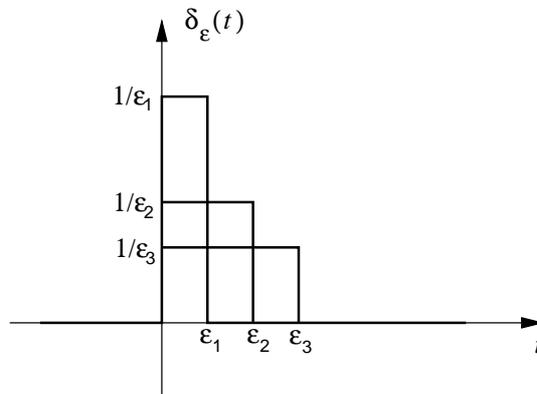
Wir untersuchen das Resultat (A.17) für den mechanischen Schwinger,

$$Y(t) = \frac{1}{\omega m} \int_0^t K(\tau) e^{-\alpha \omega_0 (t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau,$$

für das spezielle Kraftgesetz $K(t) = I \delta_\epsilon(t)$, wo I eine Konstante mit der Dimension Kraft mal Zeit (=Dimension des Impulses) ist und

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{für } 0 < t < \epsilon \\ 0 & \text{für } t > \epsilon \end{cases}$$

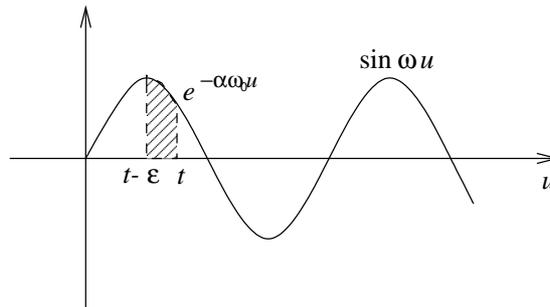
eine Rechteckfunktion:



Die Fläche unter der Kurve $\delta_\epsilon(t)$ ist immer gleich 1. Folglich wird unabhängig von ϵ immer derselbe Impuls, nämlich I , übertragen.

Dann ist für $t > \epsilon$ die Verschiebung:

$$\begin{aligned} Y_\epsilon(t) &= \frac{I}{\omega m \epsilon} \int_0^\epsilon e^{-\alpha \omega_0(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{I}{\omega m \epsilon} \int_{t-\epsilon}^t e^{-\alpha \omega_0 u} \sin \omega u du \end{aligned}$$



Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ergibt ($0 < \lambda < 1$):

$$Y_\epsilon(t) = \frac{I}{\omega m} e^{-\alpha \omega_0(t-\lambda\epsilon)} \sin \omega(t-\lambda\epsilon) \quad (\text{A.27})$$

Nun machen wir den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$. Bei der Antwortfunktion (A.27) ergibt sich ein wohldefiniertes Resultat:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Y_\epsilon(t) = \frac{I}{\omega m} e^{-\alpha \omega_0 t} \sin \omega t = \frac{I}{m} Q(t),$$

wo $Q(t)$ die Greensche Funktion der Differentialgleichung des mechanischen Schwingers ist (vgl. Abschnitt A.2.1). Beim Kraftgesetz bedeutet der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$, dass der Gesamtimpuls in immer kürzerer Zeit auf den Schwinger übertragen wird. Es ist physikalisch plausibel, dass es auf diese Zeit *dann* nicht mehr ankommt, wenn sie hinreichend klein gegen die Abklingzeit $(\alpha \omega_0)^{-1}$ und die Eigenperiode $2\pi/\omega$ der Eigenschwingung des Schwingers ist. Daher ist es sinnvoll, auch beim Kraftgesetz zum Grenzfall $\epsilon = 0$ überzugehen:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K(t) = I \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = I \delta(t),$$

wo $\delta(t)$ die *Deltafunktion* ist:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) \quad (\text{A.28})$$

Andere Bezeichnungen sind *Impulsfunktion* oder *Einheitsimpuls*. Es ist klar, dass man $\delta(t)$ nicht dem üblichen Funktionsbegriff unterordnen kann. Andererseits wäre es falsch, die Funktion $\delta(t)$ losgelöst von den gewöhnlichen Funktionen $\delta_\epsilon(t)$ zu betrachten, ja, man muss $\delta(t)$ geradezu durch eine Folge $\{\delta_\epsilon(t)\}$ mit $\epsilon \rightarrow 0$ definiert denken. Mathematisch gesehen, gehört $\delta(t)$ zu den *verallgemeinerten Funktionen* oder *Distributionen*, über die es ausführliche Theorien gibt. Für unsere Zwecke dürften jedoch die anschaulichen Überlegungen ausreichen, mit denen die Deltafunktion oben eingeführt wurde. Die erwähnte Definition von $\delta(t)$ durch eine Folge gewöhnlicher Funktionen ist in dem Buch von M.J. Lighthill Einführung in die Theorie der Fourier-Analyse und der verallgemeinerten Funktionen, Bibliogr. Institut, Mannheim, 1966, zur Grundlage einer exakten Theorie gemacht, die man auch als Nichtmathematiker verstehen kann.

A.3.2 Eigenschaften von $\delta(t)$

Auf Grund der Definition (A.28) ist

$$\delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0.$$

Weiterhin folgt aus den Eigenschaften von $\delta_\epsilon(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)F(t)dt = F(0).$$

Die Deltafunktion greift also bei dieser Integration gerade den Wert von $F(t)$ bei $t = 0$ heraus. Speziell ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Weiterhin gilt $G(t)\delta(t) = G(0)\delta(t)$. Wenn $G(0) = 0$, so ist $G(t)\delta(t) \equiv 0$.

Für die um τ verschobene Deltafunktion $\delta(t - \tau)$ gilt

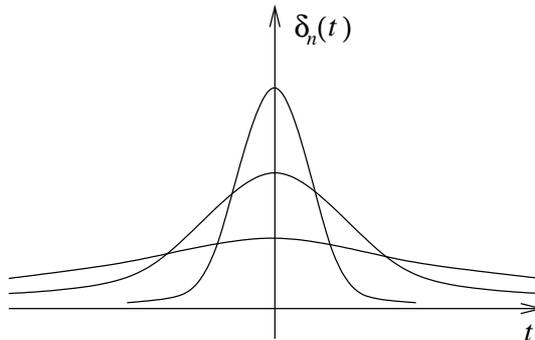
$$\delta(t - \tau) = 0 \text{ für } t \neq \tau$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau)F(t)dt = F(\tau).$$

Die Definition von $\delta(t)$ ist nicht nur mit der Folge $\{\delta_\epsilon(t)\}$ möglich, deren Funktionen unstetig sind. Eine andere Möglichkeit ist der Folge $\{\delta_n(t)\}$ mit

$$\delta_n(t) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-nt^2}.$$

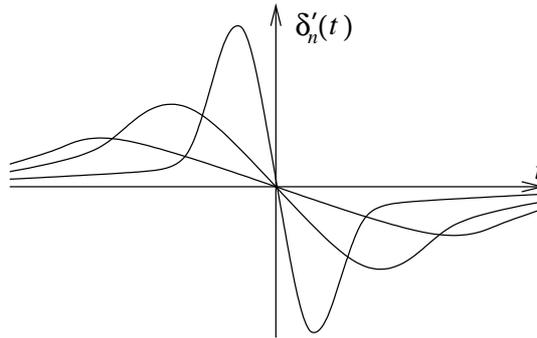


In diesem Fall ist:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t)dt &= 1 \end{aligned}$$

Mit den Funktionen $\delta_n(t)$ kann man auch Ableitungen der Deltafunktion definieren:

$$\delta^{(k)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^{(k)}(t)$$



Es gilt $\delta^{(k)}(t) = 0$ für $t \neq 0$.

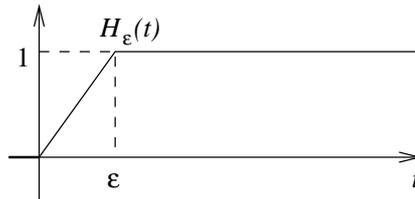
Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(t - \tau) F(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n^{(k)}(t - \tau) F(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t - \tau) F^{(k)}(t) dt, \end{aligned}$$

nach k -facher partieller Integration. Das ergibt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(t - \tau) F(t) dt = (-1)^k F^{(k)}(\tau) \quad (\text{A.29})$$

Zusammenhang zwischen der Deltafunktion und der Sprungfunktion (siehe Abschnitt A.1.4):



Wir betrachten die Funktion

$$H_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\epsilon(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{t}{\epsilon} & \text{für } 0 \leq t \leq \epsilon \\ 1 & \text{für } t > \epsilon \end{cases}$$

Das bedeutet:

$$\delta_\epsilon(t) = H'_\epsilon(t)$$

Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\delta(t) = H'(t)$$

Die Deltafunktion ist die *Ableitung der Sprungfunktion*. Zum selben Ergebnis wäre man bei der Definition von $\delta(t)$ mit Hilfe der Funktionen $\delta_n(t)$ gekommen. Es sei noch darauf hingewiesen, dass $H(t)$ dimensionslos ist, $\delta(t)$ dagegen die reziproke Dimension von t hat.

A.3.3 Anwendungen von $\delta(t)$

a) Die Möglichkeit, mit der Deltafunktion *Kraftstöße* (und ebenso Spannungs- und Stromstöße) zu beschreiben, braucht nicht näher erläutert zu werden, da dies der Ausgangspunkt unserer Einführung dieser Funktion war.

b) Eine *Punktmasse* der Masse m (oder analog eine Punktladung) lässt sich durch folgende *Dichte* darstellen:

$$\rho = m \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

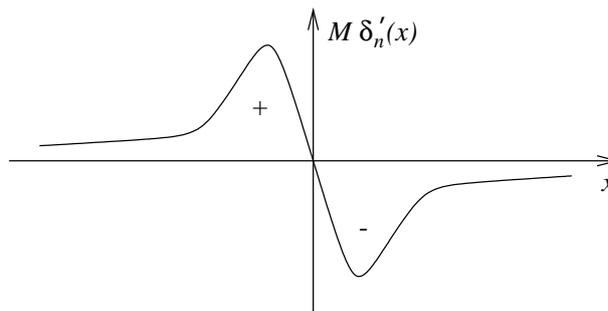
Denn es ist $\rho = 0$ für $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, und für die Gesamtmasse erhält man

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dx \, dy \, dz = m \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) \, dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) \, dz = m$$

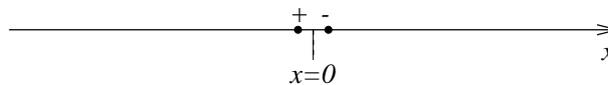
c) Die *Ladungsverteilung* eines punktförmigen *Dipols* lässt sich durch folgende *Liniendichte* $\sigma(x)$ (z.B. Coulomb pro Meter) auf der x -Achse beschreiben:

$$\sigma(x) = M\delta'(x), \quad M > 0 \quad (\text{Dimension : Ladung mal Länge})$$

Denn wir definieren $\sigma(x)$ durch die Folge $\{M\delta'_n(x)\}$:



Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt dann zwei unendlich große entgegengesetzte Punktladung, die unendlich dicht beieinander liegen:



Das Moment der Anordnung bezüglich $x = 0$ ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\sigma(x) \, dx = M \int_{-\infty}^{+\infty} x\delta'(x) \, dx = -M.$$

Das Vorzeichen ist richtig, da der Vektor des Moments von der negativen zur positiven Ladung zeigt. Auch die Dimension stimmt.

Die *räumliche Ladungsdichte* des Dipols wäre $\sigma(x, y, z) = M \cdot \delta'(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$. (z.B. Coulomb pro Kubikmeter).

d) Die Bedeutung der Deltafunktion für die Lösung inhomogener linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen:

Es sei zunächst

$$L(Y) = Y^{(n)} + a_{n-1}Y^{(n-1)} + \dots + a_1Y' + a_0Y = \delta_\epsilon(t). \quad (\text{A.30})$$

Die Lösung ist nach Abschnitt A.2.1

$$Y(t) = Y_\epsilon(t) = \int_0^t \delta_\epsilon(\tau) Q(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.31})$$

($Q(t)$ =Greensche Funktion) und erfüllt die Anfangsbedingungen

$$Y_\epsilon(+0) = Y'_\epsilon(+0) = \dots = Y_\epsilon^{(n-1)}(+0) = 0.$$

Der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ in (A.30) und (A.31) ergibt

$$L(Y) = \delta(t) \quad (\text{A.32})$$

mit der Lösung

$$Y(t) = Q(t).$$

Die Greensche Funktion eines Systems, das durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung beschrieben wird, ist also die Lösung der inhomogenen Gleichung, deren Störfunktion die Deltafunktion ist. Oder: *die Greensche Funktion ist die Antwortfunktion auf eine Störung des Systems durch die Deltafunktion (Impulsantwort).*

Die Anfangswerte von $Q(t)$ sind

$$Q(+0) = Q'(+0) = \dots = Q^{(n-2)}(+0) = 0, \quad Q^{(n-1)}(+0) = 1$$

und sind damit andere als die der Funktionen $Y_\epsilon(t)$. Das ist eine Folge des Grenzübergangs $\epsilon \rightarrow 0$. Will man also (A.32) direkt lösen, so hat man *durchweg* verschwindende Anfangswerte zu nehmen und nicht die, denen $Q(t)$ tatsächlich gehorcht. Hierbei ist es nützlich, die L-Transformierte von $\delta(t)$ zu kennen:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t) dt = 1$$

dass hier nicht gilt: $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$ für $\text{Re } s \rightarrow \infty$ (vgl. (A.8)), liegt daran, dass $\delta(t)$ eine verallgemeinerte Funktion ist.

Nun kann man der allgemeinen Lösung des Anfangswertproblems für ein System, das bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist und dann in irgendeiner Weise angeregt wird, eine *neue Deutung* geben. Die Lösung (A.14),

$$Y(t) = \int_0^t F(t - \tau) Q(\tau) d\tau = \int_0^t F(\tau) Q(t - \tau) d\tau, \quad (\text{A.33})$$

entsteht durch die Faltung der Lösung $Q(t)$ für die spezielle Anregung des Systems durch $F(t) = \delta(t)$ mit der beliebigen Störfunktion $F(t)$.

A.3.4 Duhamelscher Satz und lineare Systeme

In (A.33) sei $F(t) = H(t)$ (Sprungfunktion). In diesem Fall ist:

$$\begin{aligned} Y(t) = Y_H(t) &= \int_0^t Q(\tau) d\tau \quad (\text{Sprungantwort}) \\ Y'_H(t) &= Q(t) \end{aligned}$$

Weiter folgt aus (A.33) durch partielle Integration:

$$Y(t) = F(t - \tau) Y_H(\tau) \Big|_0^t + \int_0^t F'(t - \tau) Y_H(\tau) d\tau$$

Wegen $Y_H(+0) = 0$ wird

$$\begin{aligned} Y(t) = F(+0) Y_H(t) &+ \int_0^t F'(t - \tau) Y_H(\tau) d\tau \\ = F(+0) Y_H(t) &+ \int_0^t F'(\tau) Y_H(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Das ist der *Duhamelsche Satz*, der angibt, wie die Lösung für beliebiges $F(t)$ aus derjenigen für $F(t) = H(t)$ folgt.

Verallgemeinerung:

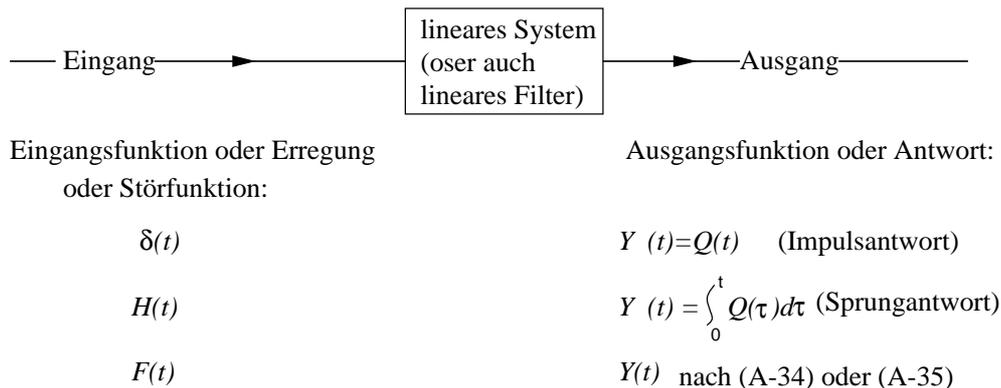
Schreit man in (A.33) $Q(t) = Y_\delta(t)$, so ist

$$Y(t) = \int_0^t F(t-\tau)Y_\delta(\tau)d\tau = \int_0^t F(\tau)Y_\delta(t-\tau)d\tau. \quad (\text{A.35})$$

Der Zusammenhang zwischen $Y_\delta(t)$ und $Y_H(t)$ ist

$$Y_\delta(t) = Y_H'(t).$$

Die in (A.34) und (A.35) enthaltene Aussage, dass man die Antwort eines Systems nur für ganz spezielle Anregungen wie durch die Delta- bzw. die Sprungfunktion zu kennen braucht, um die Lösung für beliebige Anregung angeben zu können, gilt nicht nur für Systeme, die linearen *gewöhnlichen* Differentialgleichungen gehorchen, sondern auch für solche deren Eigenschaften aus *partiellen* Differentialgleichungen oder aus Systemen von *simultanen* Differentialgleichungen folgen, sofern diese linear sind und *zeitunabhängige* Koeffizienten haben. Voraussetzung ist dabei, dass das System zu Anfang in Ruhe ist. Die Störfunktion kann je nach Problem die verschiedensten Bedeutungen haben (Kraft, Temperatur, Druck, Verschiebung etc.). Veranschaulichung durch ein Blockdiagramm:



Übergang in der Frequenzbereich mit Hilfe der Fourier-Transformation:

Die Fourier-Transformierten von $F(t)$, $Q(t)$ und $Y(t)$ seien $\overline{F}(\omega)$, $\overline{Q}(\omega)$ und $\overline{Y}(\omega)$:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{F}(\omega) \\ \overline{Q}(\omega) \\ \overline{Y}(\omega) \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} F(t) \\ Q(t) \\ Y(t) \end{array} \right\} e^{-i\omega t} dt$$

Der (enge) Zusammenhang mit den L-Transformierten war in Abschnitt A.1.7 angegeben worden. Dann gilt wie bei den L-Transformierten

$$\overline{Y}(\omega) = \overline{F}(\omega) \cdot \overline{Q}(\omega),$$

d.h. die Fourier-Transformierte $\overline{Y}(\omega)$ der Ausgangsfunktion $Y(t)$ ist das Produkt der Fourier-Transformierten $\overline{F}(\omega)$ der Eingangsfunktion $F(t)$ und $\overline{Q}(\omega)$ der Greenschen Funktion $Q(t)$. $\overline{Q}(\omega)$ heißt *Übertragungsfunktion* des linearen Systems oder Filters. Aufspaltung in Betrag und Phase:

$$\begin{aligned} \overline{Q}(\omega) &= A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} \\ A(\omega) &= \text{Amplitudencharakteristik des Systems} \\ \varphi(\omega) &= \text{Phasencharakteristik des Systems} \end{aligned}$$

$A(\omega)$ beschreibt die Verstärkung bzw. Abschwächung, die die Kreisfrequenz ω erfährt, und $\varphi(\omega)$ die Phasenverschiebung. Eine monochromatische Schwingung am Eingang,

$$F(t) = a \sin \omega t,$$

hat den Ausgang

$$Y(t) = A(\omega)a \sin(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Die Übertragungsfunktion eines Systems hat also eine ganz anschauliche Bedeutung; mit ihr wird viel gearbeitet.

Übung A.4:

Eine Kugel der Masse m fällt aus der Höhe h_1 auf die Masse M eines mechanischen (Vertikal-)Schwingers, wird dort reflektiert und erreicht danach die Höhe h_2 . Weitere Stöße sollen nicht stattfinden. Man berechne die Verschiebung der Masse M

a) mit Hilfe der homogenen Differentialgleichung $L(Y) = 0$ und der zugehörigen Anfangsbedingungen,

b) mit Hilfe der inhomogenen Differentialgleichungen $L(Y) = ?$ und verschwindenden Anfangswerten.

$$L(Y) = \ddot{Y} + 2\alpha\omega_0 Y + \omega_0^2 Y, \quad \alpha < 1$$

Übung A.5:

Beim mechanischen Seismographen (Differentialgleichung $L(Y) = -\ddot{X}$) sei die Bodenbewegung gegeben durch

$$\begin{aligned} a) \quad X(t) &= \frac{t^2 H(t)}{2}, \\ b) \quad X(t) &= tH(t), \\ c) \quad X(t) &= H(t). \end{aligned}$$

Man berechne in jedem Fall die Verschiebung $Y(t)$ und diskutiere den Zusammenhang zwischen den drei Fällen.

A.3.5 Praktisches Verfahren zur Berücksichtigung nicht verschwindender Anfangswerte der Störfunktion $F(t)$ eines linearen Problems

Beim mechanischen Seismographen ist die Störfunktion der Differentialgleichung die zweite Ableitung der Bodenverschiebung $X(t)$, und wir stellen fest, dass die Anfangswerte der Bewegung $Y(t)$ der Seismographenmasse von den Anfangswerten $X(+0)$ und $\dot{X}(+0)$ abhängen (vgl. Übung A.2.1 und Abschnitt A.2.1). Der Zusammenhang musste aus physikalischen Prinzipien abgeleitet werden. Es gibt Fälle, in denen das recht schwierig ist. Man hat daher den Wunsch nach einem einfachen Verfahren, das die Anfangswerte der Störfunktion berücksichtigt. Im folgenden verstehen wir unter der Störfunktion *in Abweichung vom Bisherigen* die Funktion, deren einfache (oder höhere) Ableitung als Inhomogenität in den Differentialgleichungen des Problems auftaucht (wir betrachten ein beliebiges lineares System). Beim mechanischen Seismographen ist also *nun* $F(t) = X(t)$ und nicht mehr $F(t) = -\ddot{X}(t)$. Wir lösen dann die Aufgabe zunächst für solche $F(t) = F_n(t)$, deren Anfangswerte bis zu einer *hinreichend* hohen Ordnung verschwinden. Dann kann man annehmen, dass die Anfangswerte der zugehörigen Lösung $Y_n(t)$ auch verschwinden. Unter dieser Voraussetzung sei $Y_n(t)$ wie folgt darstellbar:

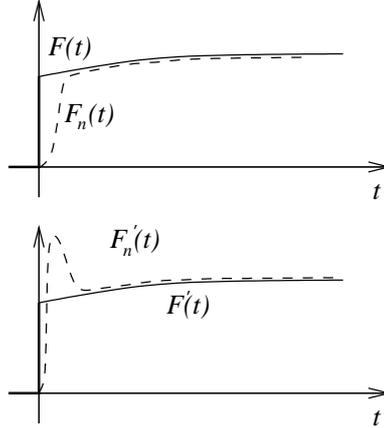
$$Y_n(t) = \int_0^t F_n^{(i)}(t - \tau) G(\tau) d\tau \quad (\text{A.36})$$

Bekannt sind also die Ordnung i der Ableitung von $F_n(t)$ ($i \geq 1$) und die Funktion $G(t)$.

Nun sei eine Folge von Funktionen $F_n(t)$ gegeben, die gegen die eigentlich interessierende Störfunktion $F(t)$ (mit nicht verschwindenden Anfangswerten) konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t)$$

Vergleiche hierzu die Bemerkungen zur Definition der Deltafunktion in den Abschnitten A.3.1 und A.3.2. Dann ist:



$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(t) &= F'(t) + F(+0)\delta(t) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F''_n(t) &= F''(t) + F(+0)\delta'(t) + F'(+0)\delta(t) \\ &\vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(i)}(t) &= F^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{i-1} F^{(j)}(+0)\delta^{(i-j-1)}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$\delta^{(0)}(t)$ ist hierbei gleich $\delta(t)$.

Die allgemeine Lösung $Y(t)$ bei beliebigen Anfangswerten von $F(t)$ ist

$$\begin{aligned} Y(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(t) \\ &= \int_0^t F^{(i)}(t-\tau)G(\tau)d\tau + \sum_{j=0}^{i-1} F^{(j)}(+0) \int_0^t \delta^{(i-j-1)}(t-\tau)G(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

wenn man (A.37) in (A.36) einsetzt. Nun ist:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta^{(i-j-1)}(t-\tau)G(\tau)d\tau & \stackrel{u=t-\tau}{=} \int_0^t \delta^{(i-j-1)}(u)G(t-u)du \\ & \stackrel{\text{mit (A.29)}}{=} (-1)^{i-j-1} \left[\frac{d^{i-j-1}}{du^{i-j-1}} G(t-u) \right]_{u=0} \\ & = (-1)^{i-j-1} \left[\frac{d^{i-j-1}}{dt^{i-j-1}} G(t-u) \right]_{u=0} (-1)^{i-j-1} \\ & = G^{(i-j-1)}(t) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Problems bei beliebigen Anfangswerten der Störungsfunktion $F(t)$ lautet also:

$$Y(t) = \sum_{j=0}^{i-1} F^{(j)}(+0)G^{(i-j-1)}(t) + \int_0^t F^{(i)}(t-\tau)G(\tau)d\tau \quad (\text{A.38})$$

Anwendung:

Mechanischer Seismograph: $\ddot{Y} + 2\alpha\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2Y = -\ddot{X}$

Die Annahme, dass die Bodenbewegung $X_n(t)$ hinreichend sanft einsetzt, erlaubt es, die Anfangswerte von $Y_n(t)$ gleich Null zu setzen:

$$Y_n(+0) = \dot{Y}_n(+0) = 0$$

Dann löst man die Differentialgleichung unter diesen Annahmen, am besten natürlich mit Hilfe der L-Transformation (vgl. Übung A.2.1):

$$Y_n(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{X}_n(t-\tau)e^{-\alpha\omega_0\tau} \sin \omega\tau d\tau$$

Vergleich mit (A.36):

$$\begin{aligned} F_n(t) &= X_n(t), \quad i = 2, \\ G(t) &= -\frac{1}{\omega} e^{-\alpha\omega_0 t} \sin \omega t \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann nach (A.38):

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(+0)G'(t) + \dot{X}(+0)G(t) + \int_0^t \ddot{X}(t-\tau)G(\tau)d\tau \\ &= X(+0)G'(t) + \dot{X}(+0)G(t) + \int_0^t \ddot{X}(\tau)G(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Dieses Resultat (mit $X(+0) = 0$) war in der erwähnten Übung direkt abgeleitet worden.

Anhang B

Hilbert-Transformation

B.1 Das Hilbert-Transformations-Paar

Die *Hilbert-Transformierte* $H(x)$ der reellen Funktion $h(x)$ ist durch folgenden Integralausdruck definiert (x und ξ sind reell):

$$H(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (\text{B.1})$$

P bedeutet den *Hauptwert* des Integrals. Zu seiner Bildung wird die Singularität $\xi = x$ des Integranden ausgespart:

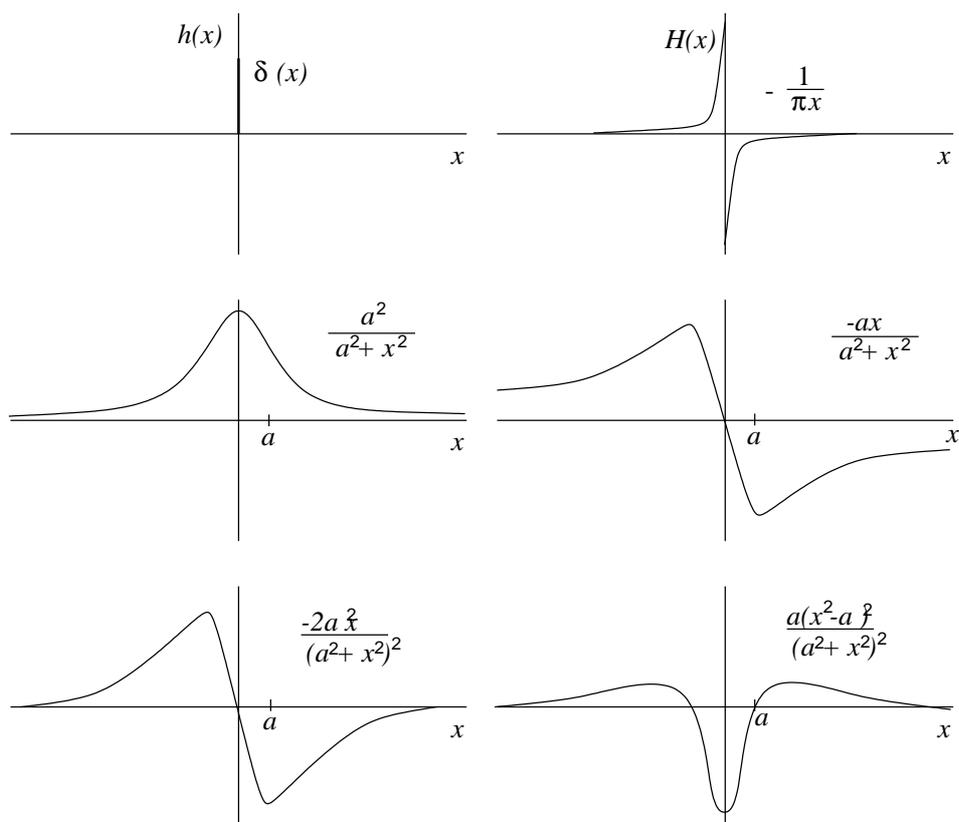
$$P \int_{-\infty}^{+\infty} ..d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x-\epsilon} ..d\xi + \int_{x+\epsilon}^{+\infty} ..d\xi \right)$$

Die *inverse Hilbert-Transformation* lautet (Beweis weiter unten):

$$h(x) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (\text{B.2})$$

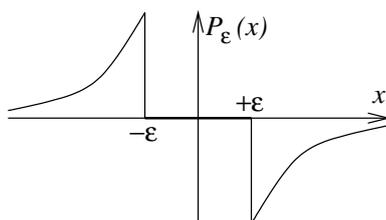
Anders als bei der Laplace- und der Fourier-Transformation haben die beiden einander zugeordneten Funktionen $h(x)$ und $H(x)$ *dasselbe Argument*.

Einige *analytische* Hilbert-Transformations-Paare:



B.2 Die Hilbert-Transformation als Filterung

Gleichung (B.1) ist ein Faltungsintegral:



$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot P \left\{ \frac{-\frac{1}{\pi}}{x-\xi} \right\} d\xi = h(x) * P \left\{ -\frac{1}{\pi x} \right\}$$

$$P \left\{ -\frac{1}{\pi x} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon(x)$$

$$P_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < \epsilon \\ -\frac{1}{\pi x} & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für die Fourier-Transformierten

$$\left. \begin{matrix} \overline{H}(\omega) \\ \overline{h}(\omega) \\ \overline{P}(\omega) \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} H(x) \\ h(x) \\ P\{-\frac{1}{\pi x}\} \end{matrix} \right\} \cdot e^{-i\omega x} dx \quad (\text{B.3})$$

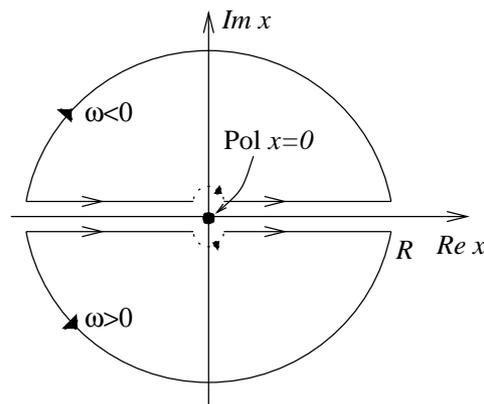
nach Anhang A, Abschnitt A.3.4,

$$\overline{H}(\omega) = \overline{h}(\omega) \cdot \overline{P}(\omega). \quad (\text{B.4})$$

Die Hilbert-Transformation ist demzufolge ein *linearer Filtervorgang*. Die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung können mit der Methode der Schnellen Fourier-Transformation sehr effektiv durchgeführt werden. Es ist daher von Vorteil, auch die Hilbert-Transformation auf dem Umweg über den Frequenzbereich mit Hilfe von (B.4) zu bewerkstelligen. Man braucht dazu die Übertragungsfunktion $\overline{P}(\omega)$ der Hilbert-Transformation. Aus (B.3) folgt:

$$\overline{P}(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-i\omega x} dx, \quad \overline{P}(0) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Wir berechnen dieses Integral mit funktionentheoretischen Methoden, indem wir den Integrationsweg zu einem Halbkreis mit unendlich großem Radius in der oberen (unteren) x -Halbebene für $\omega < 0$ ($\omega > 0$) deformieren:



$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x} dx &= \int \frac{e^{-i\omega x}}{x} dx \pm \pi i \operatorname{Res} \frac{e^{-i\omega x}}{x} \Big|_{x=0} \\ &= \int \frac{e^{-i\omega x}}{x} dx \pm \pi i \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

oberer (unterer) Integrationsweg und Vorzeichen + (-) für $\omega < 0$ ($\omega > 0$)

Neue Variable φ auf den Halbkreisen:

$$x = Re^{i\varphi}, \quad dx = Ri e^{i\varphi} d\varphi$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-i\omega x}}{x} dx &= i \int_{\pm\pi}^0 \exp[-i\omega R(\cos \varphi + i \sin \varphi)] d\varphi \\ &= i \int_{\pm\pi}^0 \exp[\omega R \sin \varphi - i\omega R \cos \varphi] d\varphi \\ &\rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty, \text{ da } \omega \sin \varphi < 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

(B.6) vereinfacht sich also zu

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x} dx = \pm \pi i,$$

und die Übertragungsfunktion $\overline{P}(\omega)$ in (B.5) wird ein ganz einfacher Ausdruck:

$$\overline{P}(\omega) = i \operatorname{sign} \omega \quad \text{mit} \quad \operatorname{sign} \omega = \begin{cases} -1 & \text{für } \omega < 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0 \\ +1 & \text{für } \omega > 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Fasst man die Hilbert-Transformation als eine Filterung der Originalfunktion auf, so folgt aus (B.4) mit (B.7), dass dabei die Frequenz Null unterdrückt wird ($\overline{P}(0) = 0$), dass aber alle anderen Frequenzen in ihrer Amplitude unverändert bleiben ($|\overline{P}(\omega)| = 1$ für $\omega \neq 0$). Bei $\omega \neq 0$ werden nur *Phasenverschiebungen* produziert, und zwar für $\omega > 0$ eine Phasenverschiebung von $\pm 90^\circ$. In der Sprache der Filtertheorie ist das Filter der Hilbert-Transformation ein *Allpaßfilter mit Mittelwertentfernung*.

Die praktische Berechnung der Hilbert-Transformierten $H(x)$ von $h(x)$ erfordert also drei Schritte:

1. Berechnung der Fourier-Transformierten $\overline{h}(\omega)$ von $h(x)$
2. Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $\overline{P}(\omega)$
3. Rücktransformation von $\overline{H}(\omega)$

Wendet man die Hilbert-Transformation *zweimal* nacheinander an, so erhält man im Frequenzbereich

$$\overline{g}(\omega) = \overline{h}(\omega) \cdot \overline{P}^2(\omega) = -\overline{h}(\omega)$$

und damit $g(x) = -h(x)$. Die ursprüngliche Funktion $h(x)$ erhält man also, wenn man bei der zweiten Hilbert-Transformation das Vorzeichen umkehrt. Damit ist Formel (B.2) für die inverse Hilbert-Transformation bewiesen.

De facto gilt dieser Beweis nur für Fälle, in denen $\overline{h}(0) = 0$ ist, also das Integral über $h(x)$ verschwindet. Das dritte Beispiel der Skizze auf S.148 ist ein solcher Fall. (B.2) gilt aber auch, wenn $\overline{h}(0) \neq 0$ ist. Dies ist so im zweiten Beispiel der Skizze, (B.2) kann in diesem Fall mit funktionentheoretischen Methoden der Integralberechnung bestätigt werden.

Bei der numerischen Hilbert-Transformation mit (B.4) und (B.7) wird die Frequenz $\omega = 0$ gelegentlich nicht richtig behandelt. Numerisch nimmt man wegen $\overline{P}(0) = 0$ *immer* ein Verschwinden des Integrals über die Hilbert-Transformierte an. Dies ist dann nicht richtig, wenn $\overline{h}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$ nicht endlich oder nicht präzise definiert ist. Der erste Fall tritt z.B. auf, wenn $h(x)$ eine Sprungfunktion ist. Der zweite Fall liegt z.B. vor bei der Rücktransformation der Hilbert-Transformierten $h(x) = -ax/(a^2+x^2)$, deren Abklingen mit wachsendem $|x|$ proportional zu $-1/x$ ist und damit zu schwach. In der Praxis hilft in solchen Fällen oft eine konstante Verschiebung des numerischen Resultats in Ordinateurichtung. Die Frequenz $\omega = 0$ ist die einzige Frequenz, bei der die numerisch berechnete Hilbert-Transformierte vom exakten Resultat abweichen kann.

Anhang C

Besselfunktionen

Im folgenden werden nur die allerwichtigsten Formeln und Eigenschaften von Besselfunktion *mit ganzzahliger Ordnung* zusammengestellt. Weitere Resultate findet man z.B. bei M. Abramovitz und I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, H. Deutsch, Frankfurt, 1985, oder in I.N. Sneddon: Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, Bibliogr. Institut, Mannheim, 1963.

Die *Differentialgleichung* der Besselfunktionen der ganzzahligen Ordnung $n = 0, 1, 2, \dots$ lautet:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (\text{C.1})$$

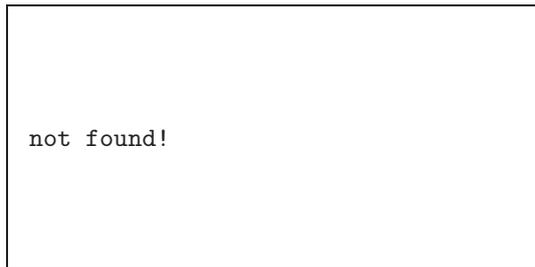
Die beiden linear unabhängigen Lösungen dieser Gleichung sind:

$$\begin{aligned} y &= J_n(x) = \text{Besselfunktion 1. Art und } n\text{-ter Ordnung} \\ y &= Y_n(x) = \text{Besselfunktion 2. Art und } n\text{-ter Ordnung} \\ &\quad \text{oder } \textit{Neumannsche Funktion } n\text{-ter Ordnung} \end{aligned}$$

Reihendarstellungen:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \\ Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} \left(0,577216 + \ln \frac{x}{2}\right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1-k)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-2k} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\Phi_k + \Phi_{k+n})}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \\ \Phi_1 &= \sum_{s=1}^l \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Graphische Darstellungen für $x \geq 0$ (aus dem Buch von Sneddon):



Die Neumannschen Funktionen haben bei $x = 0$ eine Singularität.

Die *Hankelfunktionen* oder Besselfunktionen dritter Art sind folgendermaßen definiert:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \quad \text{Hankelfunktion 1. Art} \quad (\text{C.2})$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x) \quad \text{Hankelfunktion 2. Art} \quad (\text{C.3})$$

$H_n^{(1)}(x)$ und $H_n^{(2)}(x)$ sind linear unabhängig. Die allgemeine Lösung von (C.1) lautet also entweder (A,B,C,D=Konstanten)

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

oder

$$y = CH_n^{(1)}(x) + DH_n^{(2)}(x).$$

Analogien zur Differentialgleichung der trigonometrischen Funktionen (Schwingungsgleichung)

$$y'' + n^2y = 0$$

bzw. ihren wohlbekanntesten Lösungen $\cos nx$ und $\sin nx$ bzw. e^{inx} und e^{-inx} :

Besselfunktionen	Trigonometrische Funktionen
$J_n(x)$	$\cos nx$
$Y_n(x)$	$\sin nx$
$H_n^{(1)}(x)$	$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$
$H_n^{(2)}(x)$	$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$

Asymptotische Darstellungen für $x \gg 1$:

$$\left. \begin{aligned} J_n(x) &\simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_n(x) &\simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ H_n^{(1)}(x) &\simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ H_n^{(2)}(x) &\simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.4})$$

Rekursionsformeln ($Z_n = J_n, Y_n, H_n^{(1)}$ oder $H_n^{(2)}$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{2n}{x}Z_n(x) &= Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ Z_n'(x) &= \frac{n}{x}Z_n(x) - Z_{n+1}(x) & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ Z_n'(x) &= -\frac{n}{x}Z_n(x) + Z_{n-1}(x) & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.5})$$

Häufig gebrauchte Sonderfälle der zweiten bzw. dritten Rekursionsformel in (C.5) sind:

$$\begin{aligned} J_0'(x) &= -J_1(x) \\ J_1'(x) &= J_0(x) - \frac{1}{x}J_1(x) \end{aligned}$$

Bis jetzt haben wir die Variable x als reell und nicht negativ angesehen. Alle angegebenen Formeln gelten aber auch für *komplexe* x , (C.4) unter der Voraussetzung $|x| \gg 1$. Beim Arbeiten mit komplexen x braucht man gelegentlich folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(-x) &= -e^{-n\pi i} H_n^{(2)}(x) \\ H_n^{(2)}(-x) &= -e^{n\pi i} H_n^{(1)}(x) \end{aligned}$$

Sonderfall $n = 0$:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(-x) &= -H_0^{(2)}(x) \\ H_0^{(2)}(-x) &= -H_0^{(1)}(x) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Anhang D

Das Sommerfeldintegral

Wir betrachten eine zeitlich harmonische Explosions-Punktquelle im Ursprung eines Zylinderkoordinatensystems. Ihr Kompressionspotential

$$\frac{1}{R} e^{i\omega(t-\frac{R}{\alpha})} \quad (R^2 = r^2 + z^2),$$

löst die Wellengleichung und lässt sich daher aus elementaren Lösungen der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten (mit Annahme von Zylindersymmetrie) aufbauen (vgl. die Argumentation in Abschnitt 3.7, die zu Formel (3.83) führte):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} e^{i\omega(t-\frac{R}{\alpha})} &= e^{i\omega t} \int_0^\infty g(k) k J_0(kr) e^{-il|z|} dk & (D.1) \\ l &= \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \begin{array}{l} \text{(positiv reell oder} \\ \text{negativ imaginär)} \end{array} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $g(k)$ spezialisieren wir (D.1) für $z = 0$,

$$\frac{1}{r} e^{-i\omega \frac{r}{\alpha}} = \int_0^\infty g(k) k J_0(kr) dk, \quad (D.2)$$

und benutzen dann die *Fourier-Bessel-Transformation*:

$$g(k) = \int_0^\infty G(r) r J_0(kr) dr \quad (D.3)$$

$$G(r) = \int_0^\infty g(k) k J_0(kr) dk \quad (D.4)$$

$g(k)$ ist die Fourier-Bessel-Transformierte von $G(r)$, und $G(r)$ ist die inverse Fourier-Bessel-Transformierte von $g(k)$. (D.2) hat die Form von (??): $G(r) = e^{-i\omega r/\alpha}/r$. Daher können wir (D.3) benutzen, um $g(k)$ auszurechnen:

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_0^\infty e^{-i\omega \frac{r}{\alpha}} J_0(kr) dr \\ &= \int_0^\infty \cos\left(\omega \frac{r}{\alpha}\right) J_0(kr) dr - i \int_0^\infty \sin\left(\omega \frac{r}{\alpha}\right) J_0(kr) dr \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Integrale sind bekannt (vgl. z.B. W. Gröbner und N. Hofreiter: Integraltafel, 2. Teil (Bestimmte Integrale), Springer, Wien, 1973, S. 200):

$$\int_0^\infty \cos\left(\omega \frac{r}{\alpha}\right) J_0(kr) dr = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < k < \frac{\omega}{\alpha} \\ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{für } k > \frac{\omega}{\alpha} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \sin\left(\omega \frac{r}{\alpha}\right) J_0(kr) dr = \begin{cases} \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{für } 0 < k < \frac{\omega}{\alpha} \\ 0 & \text{für } k > \frac{\omega}{\alpha} \end{cases}$$

Damit wird

$$g(k) = \begin{cases} -i \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{für } 0 < k < \frac{\omega}{\alpha} \\ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{für } k > \frac{\omega}{\alpha} \end{cases}$$

oder einfach $g(k) = \frac{1}{il}$. Einsetzen in (D.1) ergibt das *Sommerfeldintegral*:

$$\frac{1}{R} e^{-i\omega \frac{R}{\alpha}} = \int_0^{\infty} \frac{k}{il} J_0(kr) e^{-il|z|} dk \quad (\text{D.5})$$

Anhang E

Die Berechnung modaler Seismogramme

E.1 Numerische Berechnung

Die Behandlung von Punktquellen in Wellenleitern mit *beliebiger* (horizontaler) Schichtung führt auf folgende allgemeine Fernfeldform für die Feldgrößen (Verschiebung, Druck, Potential etc.) einer Normalmode:

$$N(t) = r^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \overline{M}(\omega) \exp [i (\omega t - kr)] d\omega \quad (\text{E.1})$$

$\overline{M}(\omega)$ besteht im wesentlichen aus Faktoren, die das *Quellspektrum*, die *Anregungsfunktion* der Mode (abhängig von Quelltiefe, Quellorientierung und i.a. auch von ω) und ihre *Eigenfunktion* (Amplituden-Tiefen-Verteilung) beschreiben. Die Wellenzahl $k(\omega) = \omega/c(\omega)$ enthält die *Dispersionsinformation* der Mode. Formel (4.53) des Hauptteils ist ein einfacher Sonderfall von (E.1) mit $\overline{M}(\omega) \sim k^{-1/2}(\omega)$.

Integrale der Form (E.1) können mit Hilfe der *Schnellen Fourier-Transformation* effektiv berechnet werden. Im Falle des idealen Wellenleiters, für den analytisch berechnete modale Seismogramme auf S.118 wiedergegeben sind, erhält man so folgenden numerischen Resultate für das Potential (nach Filterung mit einem Tiefpaß, der bei der Nyquistfrequenz auf Null abgeklungen ist):

not found!

Sie stimmen recht gut mit den analytischen Seismogrammen überein.

Interessiert man sich nur für Dispersionsuntersuchungen auf Horizontalprofilen, so genügt es zumeist, in $\overline{M}(\omega)$ nur das Quellspektrum zu berücksichtigen und hierüber Annahmen zu machen. Das vereinfacht die Untersuchungen, weil man dann nur die Theorie *freier* Oberflächenwellen braucht (zur Bestimmung von $k(\omega)$).

E.2 Methode der stationären Phase

Die Anwendung der Methode der stationären Phase auf Integrale vom Typ (E.1) ist in Abschnitt 4.2.3 des Hauptteils ausführlich dargestellt. Sie wird hier nochmals kurz skizziert, weil wir die Ergebnisse als Grundlage für die Behandlung von Airyphasen in Abschnitt E.3 brauchen. Zu beiden Abschnitten sei noch vorweg gesagt, dass ihre Resultate heute nicht mehr von Bedeutung für numerische Berechnungen modaler Seismogramme sind; dazu ist die in Abschnitt E.1 erwähnte Schnelle Fourier-Transformation viel besser geeignet. Es ergeben sich aber analytische Gesetzmäßigkeiten für die Amplitudenabnahme von Oberflächenwellen mit wachsender Entfernung; solche Resultate sind eine wichtige Ergänzung numerischer Methoden.

Die Phase $\varphi(\omega) = \omega t - k(\omega)r$ in (E.1) hat folgende Ableitungen nach ω (U =Gruppengeschwindigkeit):

$$\varphi' = t - rk' = t - \frac{r}{U} \quad (\text{E.2})$$

$$\varphi'' = -rk'' = rU^{-2}U' \quad (\text{E.3})$$

$$\varphi''' = -rk''' = r(U^{-2}U'' - 2U^{-3}U') \quad (\text{E.4})$$

Stationäre Phasenwerte folgen aus $\varphi'(\omega_0) = 0$ und werden damit durch

$$U(\omega_0) = \frac{r}{t} \quad (\text{E.5})$$

festgelegt. Wenn dann

$$U'(\omega_0) \neq 0 \quad (\text{E.6})$$

ist, so kann $\varphi(\omega)$ bei ω_0 durch

$$\varphi(\omega) = \varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_0''(\omega - \omega_0)^2 \quad (\text{E.7})$$

angenähert werden ($\varphi_0 = \varphi(\omega_0)$, $\varphi_0'' = \varphi_0''(\omega_0)$). Das modale Seismogramm lautet dann in der *Stationäre-Phase-Approximation*:

$$\begin{aligned} N(t) &= r^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \overline{M}(\omega) \exp \left[i \left(\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_0''(\omega - \omega_0)^2 \right) \right] d\omega \\ &\simeq r^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \left\{ \overline{M}(\omega_0) e^{i\varphi_0} \left(\frac{2}{|\varphi_0''|} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2 \operatorname{sign}\varphi_0''} dx \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\left(\text{mit } x = \left(\frac{|\varphi_0''|}{2} \right)^{1/2} (\omega - \omega_0) \right)$$

Mit (E.3) erhalten wir schließlich ($U_0 = U(\omega_0)$, $U_0' = U'(\omega_0)$, $k_0 = k(\omega_0) = \omega_0/c(\omega_0)$):

$$N(t) = \frac{U_0}{r} \left(\frac{2\pi}{|U_0'|} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \left\{ \overline{M}(\omega_0) \exp \left[i \left(\omega_0 t - k_0 r + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} U_0' \right) \right] \right\} \quad (\text{E.9})$$

(E.9) gilt unter der Voraussetzung (E.6). ω_0 , t und r sind durch (E.5) miteinander verknüpft: dies erzeugt die *Frequenzmodulation* der Normalmode. Ihre Amplituden sind ebenfalls zeitabhängig: dies wird vor allem durch $\overline{M}(\omega_0(t))$ bewirkt, zu einem gewissen Teil aber auch durch U_0 und U_0' (*Amplitudenmodulation*).

Betrachten wir die *Amplituden* der Normalmode als Funktion der Entfernung r , so sehen wir, dass sie mit r^{-1} abnehmen, solange (E.9) gilt. Diese Aussage bezieht sich auf Amplituden *im Zeitbereich*; spektrale Amplituden nehmen nach (E.1) mit $r^{-1/2}$ ab.

E.3 Airyphasen

Bei realistischen Wellenleitern gilt es eine oder mehrere Frequenzen, für die die *Gruppengeschwindigkeit* stationär ist. Im Folgenden sei ω_0 eine solche Frequenz. Es gilt also $U'(\omega_0) = 0$, (E.6) ist damit verletzt, und (E.9) gilt dann nicht mehr. Eine hinreichende Approximation der Phase ist in diesem Fall

$$\varphi(\omega) = \varphi_0 + \varphi'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{6}\varphi_0'''(\omega - \omega_0)^3 \quad (\text{E.10})$$

anstelle von (E.7). Aus (E.2) und (E.4) folgt:

$$\varphi'_0 = t - \frac{r}{U_0}, \quad \varphi_0''' = rU_0^{-2}U_0'' \quad (\text{E.11})$$

Die Phase ist *nicht mehr stationär bei ω_0* , sondern hat dort einen Wendepunkt. Der dritte Term in (E.10) muss berücksichtigt werden, weil φ'_0 von negativen Werten für $t < r/U_0$ zu positiven Werten für $t > r/U_0$ wechselt und daher der zweite Term in (E.10) nicht notwendigerweise überwiegt. In Analogie zu (E.8) erhält man dann folgende Approximation des modalen Seismogramms für Zeiten in der Nähe von r/U_0 (*Airyphasen-Approximation*):

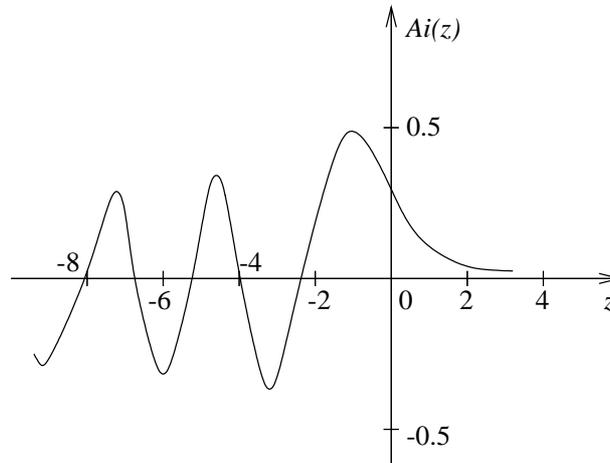
$$\begin{aligned} N(t) &= r^{-\frac{1}{2}} \text{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \overline{M}(\omega) \exp \left[i \left(\varphi_0 + \varphi'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{6}\varphi_0'''(\omega - \omega_0)^3 \right) \right] d\omega \\ &\simeq r^{-\frac{1}{2}} \text{Re} \left\{ \overline{M}(\omega_0) e^{i\varphi_0} \left(\frac{2}{|\varphi_0'''} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i \left(\varphi'_0 \left(\frac{2}{|\varphi_0'''} \right)^{\frac{1}{3}} x + \frac{x^3}{3} \text{sign} \varphi_0''' \right) \right] dx \right\} \\ &= 2r^{-\frac{1}{2}} \text{Re} \left\{ \overline{M}(\omega_0) e^{i\varphi_0} \right\} \left(\frac{2}{|\varphi_0'''} \right)^{\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \cos \left[\text{sign} \varphi_0''' \cdot \varphi'_0 \left(\frac{2}{|\varphi_0'''} \right)^{\frac{1}{3}} x + \frac{x^3}{3} \right] dx \end{aligned}$$

(mit $x = \left(\frac{|\varphi_0'''}{2} \right)^{\frac{1}{3}} (\omega - \omega_0)$)

Das Integral lässt sich durch die *Airyfunktion*

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(zx + \frac{x^3}{3} \right) dx$$

ausdrücken, die wie folgt aussieht:

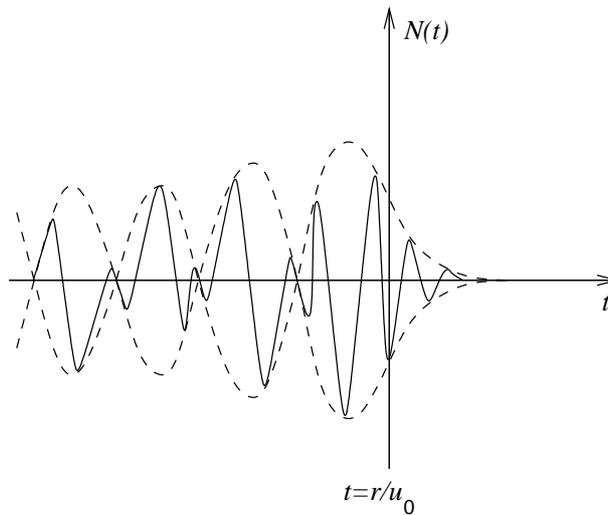


Mit (E.11) erhält man dann folgendes Endresultat für *Airyphase*:

$$N(t) = \frac{2}{r^{\frac{5}{6}}} \left(\frac{2U_0}{|U_0''|} \right)^{\frac{1}{3}} \operatorname{Re} \{ \overline{M}(\omega_0) \exp [i(\omega_0 t - k_0 r)] \} \operatorname{Ai} \left[\frac{\operatorname{sign} U_0''}{r^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2U_0^2}{|U_0''|} \right)^{\frac{1}{3}} \left(t - \frac{r}{U_0} \right) \right] \quad (\text{E.12})$$

Dies ist eine monochromatische Schwingung der Frequenz ω_0 (die aus $U'(\omega_0) = 0$ folgt, deren Amplitude durch die Airyfunktion moduliert wird.

Ist $\operatorname{sign} U_0'' > 0$, d.h., liegt ein Gruppengeschwindigkeits*minimum* vor, so sieht das modale Seismogramm qualitativ so aus (das Argument z der Airyfunktion wächst mit t):



Das Seismogramm *endet* mit starken Amplituden in der Nachbarschaft der theoretischen Airyphasen-Einsatzzeit. Das Bild auf S.108 gibt quantitative Resultate für einen flüssigen Wellenleiter wieder; im Airyphasenbereich des Seismogramms ist mit der Theorie dieses Abschnitts gerechnet worden.

Ist $\operatorname{sign} U_0'' < 0$ (bei einem Gruppengeschwindigkeits*maximum*), so nimmt z mit wachsendem t ab, und die Airyfunktion wird von rechts nach links durchlaufen. Das Seismogramm *beginnt* mit starken Amplituden.

Die *Amplituden der Airyphasen* als Funktion der Entfernung nehmen mit $r^{-5/6}$ ab und damit schwächer als gemäß (E.9). Mit wachsender Entfernung tritt die Airyphase also deutlicher hervor.

Index

- Abstrahlcharakteristik, 40, 43, 44
Airyphase, 108, 121, 156, 157
Anregungsfunktion, 34, 79, 115, 155
- Bewegungsgleichung, 18, 19, 22, 134
Brechungskoeffizient, 48
Brewster-Winkel, 54
- Deformation, 7
Deformationstensor, 8, 13, 19
Dipol, 41, 140
Dispersion, 95, 108
Dispersionsgleichung, 98, 101
Dispersionskurve, 103
Double-couple, 44
- Eigenfunktion, 104, 155
Eigenspannungen, 18
Eikonalgleichung, 84
Elastizitätsmodul, 22
- Fermatsches Prinzip, 80
Fernfeld, 34, 40, 41, 73
- Generalisierte Strahlentheorie, 70
Grundwelle, 108
Gruppengeschwindigkeit, 103, 106, 119, 156
- Herdlösung, 45
- Impedanz, 50
Inhomogene Welle, 51
- Kaustiken, 92
Kirchhoffsche Formel, 37
Knotenebene, 43
Knotenfläche, 99, 103, 116
Kompressionsmodul, 22
Kompressionspotential, 25
Kompressionswellen, 26, 48
Kopfwelle, 69, 78
Kritischer Punkt, 68
Kritischer Winkel, 51, 52, 78
Kubische Dilatation, 12
- Lamesche Parameter, 20
- Langsamkeit, 87, 89
Longitudinalwellen, 26
- Methode der stationären Phase, 107, 118, 156
Modales Seismogramm, 105, 107, 117, 118, 155
Moment, 45
Momentanfrequenz, 118
Momentenfunktion, 42
- Nahfeld, 34
Normalmode, 96, 101, 115
Normalspannung, 15, 23
- Phasengeschwindigkeit, 95, 105
Poissonsches Verhältnis, 22
Polarisation, 46, 48, 59, 99
- Reduziertes Verschiebungspotential, 34
Reflektivitätsmethode, 66
Reflexionskoeffizient, 48
Retardierte Zeit, 35
Reziprozität, 113
Rotationstensor, 8
- Scherbruch, 41, 45
Schermodul, 22
Scherpotential, 25
Scherwellen, 26, 48
Seismischer Strahl, 81, 86
SH-Wellen, 48, 49, 96
Single-couple, 41
Snelliussches Gesetz, 49, 54, 62
Sommerfeldintegral, 67, 153
Spannung, 15
Spannungs-Dehnungs-Beziehungen, 19
Spannungstensor, 15
Spannungsvektor, 15, 17
Strahlgleichung, 81, 86
Strahlparameter, 82
SV-Wellen, 48, 96
- Tangentialspannung, 15, 23
Totalreflexion, 51, 54, 91
Transportgleichung, 84
Transversalwellen, 26

- Verlustbehaftete Mode, 96, 111
- Verschiebungspotential, 25
- Verzögerungszeit, 92

- Wasserwelle, 108
- Wellenfrontapproximation, 72
- Wellengleichung, 26, 29, 37, 46, 61, 66, 70,
90, 96
- Wellenleiter, 111, 117
- Wellenzahl, 46, 61
- WKBJ-Approximation, 89, 91
- WKBJ-Seismogramm, 92, 94