

Wellen und Signale

Teil Signalbearbeitung

Dirk Gajewski

17. Dezember 2009

Präambel

Diese Vorlesungsmaterialien basieren auf einem Skriptum meines hochgeschätzten Kollegen Prof. Dr. Gerhard Müller, Universität Frankfurt, der leider viel zu früh am 2. Juli 2002 verstorben ist.

Präambel

Diese Vorlesungsmaterialien basieren auf einem Skriptum meines hochgeschätzten Kollegen Prof. Dr. Gerhard Müller, Universität Frankfurt, der leider viel zu früh am 2. Juli 2002 verstorben ist.

Das Vorlesungsskript ist online verfügbar, siehe:
www.geophysics.zmaw.de

- Studium und Lehre
- Vorlesungsskripte und begleitende Materialien
- Signalbearbeitung

Vorwort

- Datenerfassung ausschließlich digital

Vorwort

- Datenerfassung ausschließlich digital
- Größte Datenmengen in Exploration

Vorwort

- Datenerfassung ausschließlich digital
- Größte Datenmengen in Exploration
- Erlaubt Bearbeitung auf Digitalrechnern

Vorwort

- Datenerfassung ausschließlich digital
- Größte Datenmengen in Exploration
- Erlaubt Bearbeitung auf Digitalrechnern
- Dadurch kann Informationsgehalt der Daten oft erst ausgeschöpft werden

Vorwort

- Datenerfassung ausschließlich digital
- Größte Datenmengen in Exploration
- Erlaubt Bearbeitung auf Digitalrechnern
- Dadurch kann Informationsgehalt der Daten oft erst ausgeschöpft werden
- Kenntnis der Methoden ist unbedingt notwendig

Vorwort

- Datenerfassung ausschließlich digital
- Größte Datenmengen in Exploration
- Erlaubt Bearbeitung auf Digitalrechnern
- Dadurch kann Informationsgehalt der Daten oft erst ausgeschöpft werden
- Kenntnis der Methoden ist unbedingt notwendig

Damit ist das Ziel der Lehveranstaltung definiert!

Inhalte

1 Zeitreihen und Zahldarstellung

Inhalte

- 1 Zeitreihen und Zahldarstellung
- 2 Fourier-Transformation

Inhalte

- 1 Zeitreihen und Zahldarstellung
- 2 Fourier-Transformation
- 3 Faltung

Inhalte

- 1 Zeitreihen und Zahldarstellung
- 2 Fourier-Transformation
- 3 Faltung
- 4 Abtasttheorem

Inhalte

- 1 Zeitreihen und Zahldarstellung
- 2 Fourier-Transformation
- 3 Faltung
- 4 Abtasttheorem
- 5 Lineare Filter

Inhalte

- 1 Zeitreihen und Zahldarstellung
- 2 Fourier-Transformation
- 3 Faltung
- 4 Abtasttheorem
- 5 Lineare Filter
- 6 Korrelationsmethoden

Inhalte

- 1 Zeitreihen und Zahldarstellung
- 2 Fourier-Transformation
- 3 Faltung
- 4 Abtasttheorem
- 5 Lineare Filter
- 6 Korrelationsmethoden
- 7 z-Transformation

Inhalte

- 1 Zeitreihen und Zahldarstellung
- 2 Fourier-Transformation
- 3 Faltung
- 4 Abtasttheorem
- 5 Lineare Filter
- 6 Korrelationsmethoden
- 7 z-Transformation
- 8 Rekursive Filter

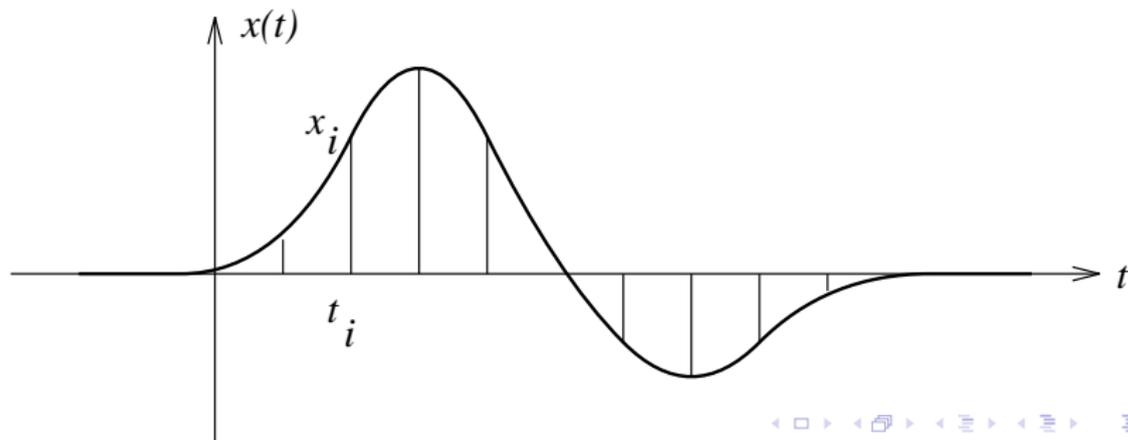
Inhalte

- 1 Zeitreihen und Zahldarstellung
- 2 Fourier-Transformation
- 3 Faltung
- 4 Abtasttheorem
- 5 Lineare Filter
- 6 Korrelationsmethoden
- 7 z-Transformation
- 8 Rekursive Filter
- 9 Optimum Filter

Zeitreihen

Wenn eine **Zeitfunktion** $x(t)$ zu diskreten Zeiten t_i betrachtet wird, entsteht eine Folge von Zahlen, eine **Zeitreihe**:

$$\{x_i\} = \{x(t_i)\}$$



$$\{x_i\} = \{x(t_i)\}$$

Die geschweifte Klammer deutet die Gesamtheit der Funktionswerte an.

In Physik, Geophysik, Elektrotechnik etc. entstehen Zeitreihen durch das **Abtasten** (englisch: sampling) oder **Digitalisieren** von **analogen**, d.h. kontinuierlichen Registrierungen, z.B. von Seismogrammen oder Spannungen. In diesen Fällen ist das **Abtastintervall** Δt zumeist konstant, und die **Abtastrate** ist $\frac{1}{\Delta t}$. Wird Δt in s angegeben, so ist die Einheit der Abtastrate 1 Hz, und es werden pro Sekunde $\frac{1}{\Delta t}$ diskrete, gleichabständige Werte von $x(t)$ produziert. Wir werden die beiden folgenden Formen einer Zeitreihe benutzen:

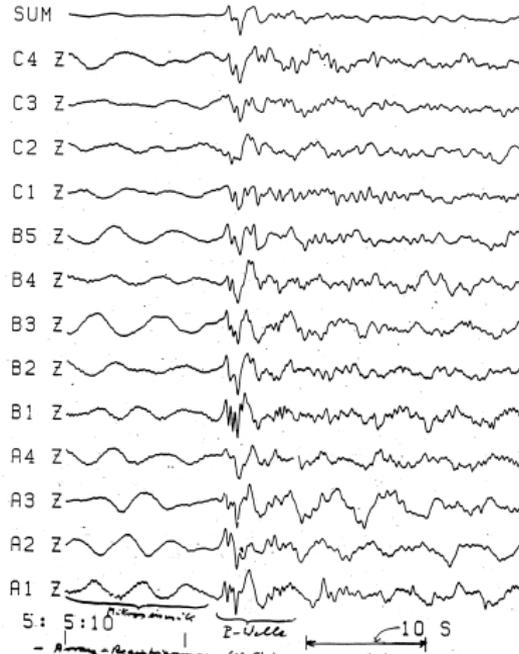
$$\begin{aligned} \{x_i\} &= \{x(i\Delta t)\} && x(0) \text{ bekommt Index } 0 \\ \text{oder} &&& \\ \{x_i\} &= \{x((i-1)\Delta t)\} && x(0) \text{ bekommt Index } 1 \end{aligned} \tag{1-1}$$

Die erste Form in (1-1) wird am häufigsten vorkommen. Heute registrieren praktisch alle Meßgeräte bereits digital, d.h. sie liefern direkt die Zeitreihe über einen angeschlossenen **Analog-Digital-Wandler** auf ein Speichermedium, z.B. ein Digital-Magnetband oder eine optische Platte (CD, DVD). Die x_i der Zeitreihe (1-1) sind dabei **verschlüsselt** (codiert), z.B. als Binärzeichen oder häufiger in der Form

$$x_i = M(\text{antisse}) \cdot 2^{E(\text{xponent})}, \quad (1-2)$$

und M und E sind Binärzahlen. x_i repräsentiert die Amplitude des digitalisierten Signals. Ein Beispiel zur Darstellung (1-2) folgt in Abschnitt 2.

24 SEP 1983 BROAD-BO -3-



Ein **Beispiel einer digitalen Datenerfassung** sind die Registrierungen am Seismologischen Zentralobservatorium Gräfenberg in Erlangen. Die Ausgangsspannung der Seismometer dieses Observatoriums wird mit $\Delta t = 0.05$ s, d.h. mit der Abtastrate 20 Hz, digitalisiert und in der Form (1-2) auf Magnetband bzw. optischer Platte aufgezeichnet. Eine Analogabspielung dieser Daten ist in der Abbildung auf S. 23 dargestellt. Die in diesem Beispiel durchgeführte **Verschiebung der Einzelseismogramme** und die Bildung der **Summenspur** sind nützliche Operationen, die wegen der digitalen Datenform einfach durchzuführen sind. Weitere digitale Datenbearbeitungsverfahren wie **Spektrenberechnung**, **Filtermethoden** oder **Korrelationstechniken** werden noch ausführlich behandelt.

Wir brauchen gelegentlich eine mathematische Form $\tilde{x}(t)$ der Zeitreihe zur Zeitfunktion $x(t)$. Der ersten Form in (1-1) entspricht

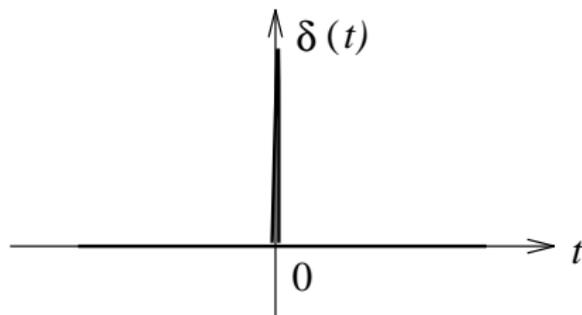
$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \delta(t - i \Delta t). \quad (1-3)$$

$\delta(t)$ ist die **Deltafunktion**:

$$\delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0$$

$\delta(0)$ derart unendlich, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad .$$



$\tilde{x}(t)$ aus (1-3) verschwindet für alle t zwischen den Stützstellen von $x(t)$. Das Integral über die Stützstelle $t_i = i\Delta t$ ist

$$\int_{t_i - \Delta t/2}^{t_i + \Delta t/2} \tilde{x}(t) dt = x_i \int_{t_i - \Delta t/2}^{t_i + \Delta t/2} \delta(t - t_i) dt = x_i \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \delta(\tau) d\tau = x_i$$

und damit gleich dem Stützwert.

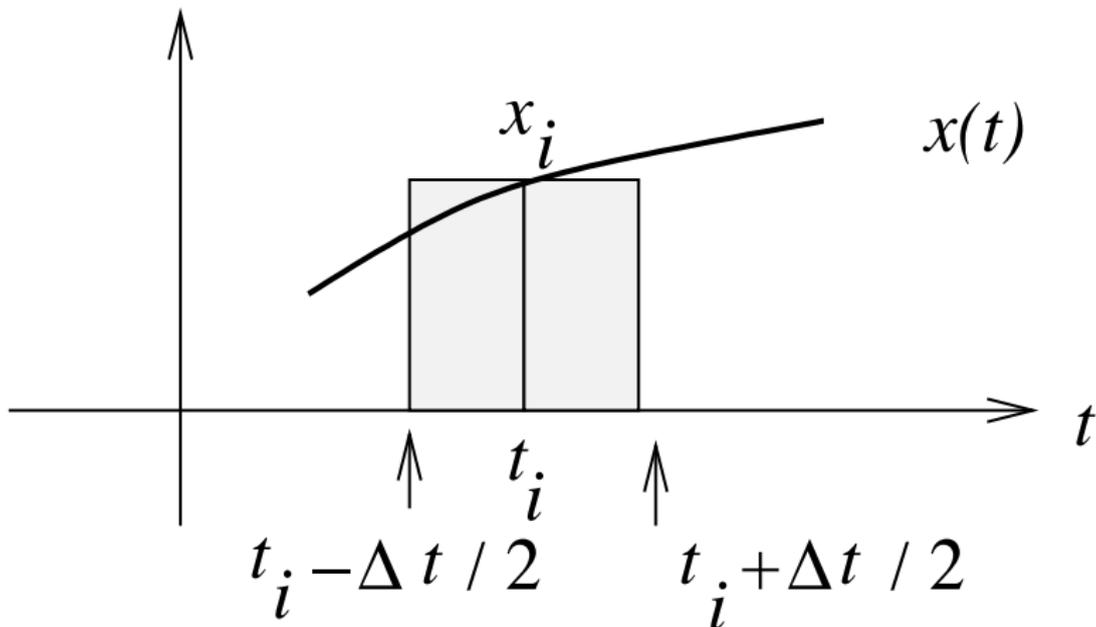
Eine andere, seltener benötigte Form von $\tilde{x}(t)$ ist

$$\tilde{x}(t) = \Delta t \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \delta(t - i\Delta t). \quad (1-4)$$

Wegen des Faktors Δt sind die Integraleigenschaften von $\tilde{x}(t)$ und $x(t)$ in diesem Fall gleich:

$$\int_{t_i - \Delta t/2}^{t_i + \Delta t/2} \tilde{x}(t) dt = \Delta t \cdot x_i = \int_{t_i - \Delta t/2}^{t_i + \Delta t/2} x(t) dt$$

Das letztere Gleichheitszeichen gilt wegen Anwendung der Rechteckregel (siehe Abbildung).



Zahldarstellung

Zur Darstellung einer ganzen Zahl als Dezimalzahl braucht man die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 und schreibt mit ihrer Hilfe die Zehnerpotenzen der Zahl nebeneinander, z.B.:

$$1205 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Entsprechend braucht man zur Darstellung einer Zahl als Binärzahl nur zwei Ziffern, z.B. 0 und 1, und schreibt mit ihrer Hilfe die Zweierpotenzen nebeneinander, z.B.:

$$1011 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \quad (= \text{Dezimalzahl } 11)$$

Zur Darstellung jeder Stelle einer Binärzahl braucht man 1 bit. Ein bit (von binary digital unit oder kurz binary digit abgeleitet) ist eine Ja-Nein-Entscheidung. Physikalisch wird sie z.B. durch zwei verschiedene Magnetisierungen an einer Stelle eines Magnetbandes

Mantisse

Im folgenden wird nun die Zahldarstellung (1-2), mit M (Mantisse) und E (Exponent) als Binärzahlen, veranschaulicht durch die Realisierung am Seismologischen Zentralobservatorium Gräfenberg (in den 90er Jahren wurde hier ein 16 Bit AD-Wandler eingesetzt). Zur Darstellung der Mantisse M werden dort 11 bit benötigt:

$$M = a_1 \cdot 2^0 + a_2 \cdot 2^1 + a_3 \cdot 2^2 + \dots + a_{11} \cdot 2^{10}$$
$$a_k = 0 \text{ oder } 1$$

Minimalwert ist $M_{min} = 0$ (d.h. $a_1 = a_2 = \dots = a_{11} = 0$)

Maximalwert $M_{max} = 2047 = 2^{11} - 1$ (d.h.

$a_1 = a_2 = \dots = a_{11} = 1$).

Exponent

Der Exponent wird durch 4 bit dargestellt:

$$E = b_1 \cdot 2^0 + b_2 \cdot 2^1 + b_3 \cdot 2^2 + b_4 \cdot 2^3$$

$$b_k = 0 \text{ oder } 1$$

$$E_{min} = 0$$

$$E_{max} = 15$$

Die Zahl $x_i = M \cdot 2^E$ kann also variieren zwischen
0 und $(2^{11} - 1) \cdot 2^{15} \approx 2^{26}$.

Diese Zahl heißt **Dynamikumfang** und entspricht dem Verhältnis
von größter zu kleinster Zahl $\neq 0$.

Die zu $x_i = M \cdot 2^E$ benachbarten Zahlen, die dargestellt werden
können, lauten:

$$x_i \pm \Delta x_i = (M \pm 1) \cdot 2^E.$$

$\Delta x_i = 2^E$ wächst mit E , d.h. je größer x_i ist, desto größer ist
dieser Abstand.

Darstellbaren Zahlen

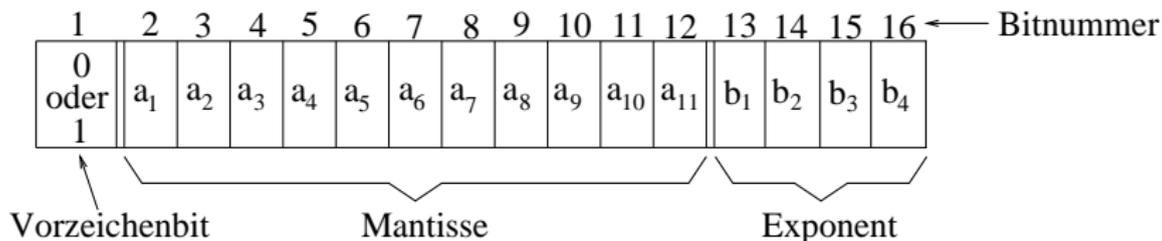
Die Tabelle der **darstellbaren Zahlen** ist wie folgt:

x_i	E	Δx_i	Anzahl
$0, 1, 2, 3, \dots, 2047 \cdot 2^0$	0	2^0	2048
$2048 \cdot 2^0 (= 1024 \cdot 2^1), 1025 \cdot 2^1, \dots, 2047 \cdot 2^1$	1	2^1	1024
$2048 \cdot 2^1 (= 1024 \cdot 2^2), 1025 \cdot 2^2, \dots, 2047 \cdot 2^2$	2	2^2	1024
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$2048 \cdot 2^{14} (= 1024 \cdot 2^{15}), 1025 \cdot 2^{15}, \dots, 2047 \cdot 2^{15}$	15	2^{15}	1024

Die relative Genauigkeit oder **Auflösung** $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ hängt vom Wert der Mantisse M ab und liegt zwischen $\frac{1}{2047}$ und $\frac{1}{1024}$, also im Promillebereich (für $x_i > 2047$). Durch diese **Quantelung** können

Zu den 11 bit für die Mantisse und den 4 bit für den Exponenten kommt noch das **Vorzeichenbit**: 0 für $x_i > 0$, 1 für $x_i < 0$. 16 bit ist die **Wortlänge** des Rechners am Seismologischen Zentralobservatorium. Bei der gewählten Aufteilung zwischen Mantisse und Exponent kann man also ganze Zahlen zwischen -2^{26} und $+2^{26}$ mit einer Auflösung von höchstens 0.05% ($\frac{1}{2047}$) darstellen. $\pm 2^{26}$ entspricht dabei einer Eingangsspannung am Analog-Digital-Wandler von ± 10 V.

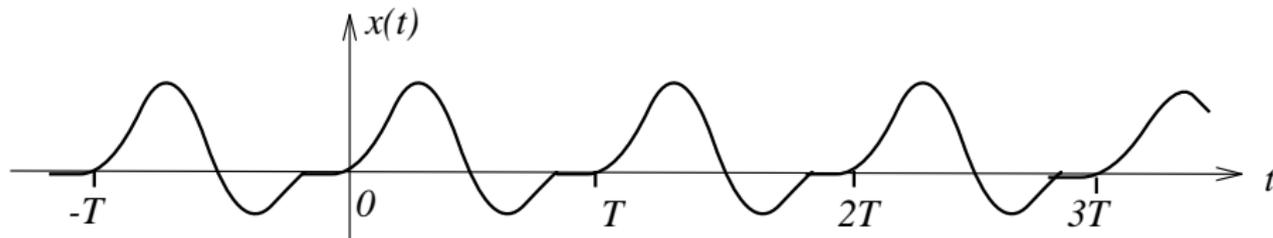
Das **16-bit-Rechnerwort** sieht schematisch wie folgt aus:



Eine Verkleinerung der Mantisse, z.B. um 1 bit, würde den Dynamikumfang vergrößern und die Auflösung verschlechtern; bei einer Vergrößerung der Mantisse wäre es umgekehrt. Bei der Aufteilung einer gegebenen Wortlänge auf Mantisse und Exponent muß also nach dem besten **Kompromiß** zwischen Dynamikumfang und Auflösung gesucht werden.

FR aperiodische Funktion

Wir betrachten eine periodische Funktion $x(t)$ mit der Periode T , die zeitlich nicht beschränkt ist (nicht impulsförmig).



So eine Funktion läßt sich durch folgende Fourier-Reihe darstellen, die man als Superposition **reeller** harmonischer Schwingungen interpretieren kann:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n \frac{t}{T} + b_n \sin 2\pi n \frac{t}{T} \right) . \quad (2-1)$$

Die reellen Fourier-Koeffizienten a_n und b_n sowie a_0 werden wie folgt berechnet:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi n \frac{t}{T} dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi n \frac{t}{T} dt \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3, \dots \quad (2-2)$$

Eine zu (2-1) alternative Fourier-Reihe ist folgende Superposition von **komplexen** Schwingungen ($i = \sqrt{-1} = \text{imaginäre Einheit}$)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n \frac{t}{T}} \quad , \quad (2-3)$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{T}} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2-4)$$

$$c_{-n} = c_n^* \quad (= \text{komplex konjugierter Wert zu } c_n).$$

Der Zusammenhang der Koeffizienten (2-2) und (2-4) ist wie folgt:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Damit läßt sich die Identität von (2-1) und (2-3) nachweisen. Für die Teilsumme von (2-3),

$$S_n = c_n e^{2\pi i n \frac{t}{T}} + c_{-n} e^{-2\pi i n \frac{t}{T}},$$

gilt:

$$\begin{aligned} S_n &= c_n \left(\cos 2\pi n \frac{t}{T} + i \sin 2\pi n \frac{t}{T} \right) + c_{-n} \left(\cos 2\pi n \frac{t}{T} - i \sin 2\pi n \frac{t}{T} \right) \\ &= (c_n + c_{-n}) \cos 2\pi n \frac{t}{T} + i (c_n - c_{-n}) \sin 2\pi n \frac{t}{T} \\ &= a_n \cos 2\pi n \frac{t}{T} + i(-i)b_n \sin 2\pi n \frac{t}{T} \end{aligned}$$

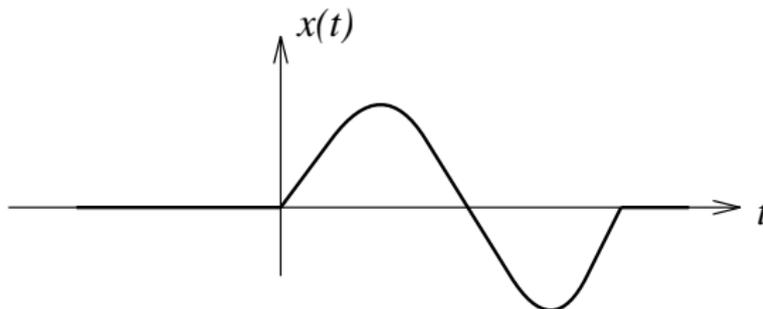
Das ist die entsprechende Teilsumme von (2-1). Damit (und mit $c_0 = a_0$) ist die Gleichheit von (2-1) und (2-3) bewiesen.

Für viele praktische Zwecke ist die komplexe Fourier-Reihe (2-3) die günstigere Form (warum?).

Die Fourier-Koeffizienten c_n in (2-3) haben folgende anschauliche Bedeutung: Der Betrag von c_n sagt aus, wie stark die **Partialschwingung** mit der Frequenz $\frac{n}{T}$ in $x(t)$ vertreten ist, die Phase von c_n bestimmt die Phasenlage dieser Partialschwingung.

Aperiodische Funktionen

Läßt man im vorigen Abschnitt die Periode T über alle Grenzen wachsen, so entsteht die aperiodische (impulshafte) Funktion $x(t)$.



Aperiodische Funktionen

Die entsprechende Verallgemeinerung der Fourier-Reihe (2-3) lautet

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2-5)$$

und ist die Darstellung von $x(t)$ durch ein Fourier-Integral. $\bar{x}(\omega)$ heißt **Fourier-Transformierte** und wird wie folgt aus $x(t)$ berechnet:

$$\bar{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2-6)$$

Die Variable ω heißt **Kreisfrequenz** und ist das 2π -fache der Frequenz f , also $\omega = 2\pi f$.

(2-5) ist das Analogon zur Fourier-Reihe (2-3) und (2-6) das Analogon zu den Fourier-Koeffizienten (2-4). (2-5) und (2-6) sind ein Beispiel für eine Integral-Transformation, hier die Fourier-Transformation

(2-6)= Transformation von $x(t)$ in den Frequenzbereich,
(2-5)= Rücktransformation von $\bar{x}(\omega)$ in den Zeitbereich.

Manchmal wird der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ bei (2-5) weggelassen und bei (2-6) hinzugefügt bzw. sowohl bei (2-5) als auch bei (2-6) steht vor dem Integral der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Die Fourier-Transformierten unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor.

Es gibt auch eine grundsätzlich andere Definition des Fourier-Transformations-Paares als (2-5) und (2-6), nämlich eine mit vertauschten Vorzeichen in den Exponentialtermen. Wichtig ist nur, daß man weiß, welche Version der Fourier-Transformation in einem bestimmten Zusammenhang benutzt wird und daß man diese konsequent benutzt. (2-5) und (2-6) kann man anschaulich wie folgt interpretieren:

(2-5) = *Superposition von harmonischen Schwingungen der Kreisfrequenz ω zu $x(t)$ (harmonische Synthese),*

(2-6) = *Zerlegung von $x(t)$ in harmonische Schwingungen (harmonische Analyse).*

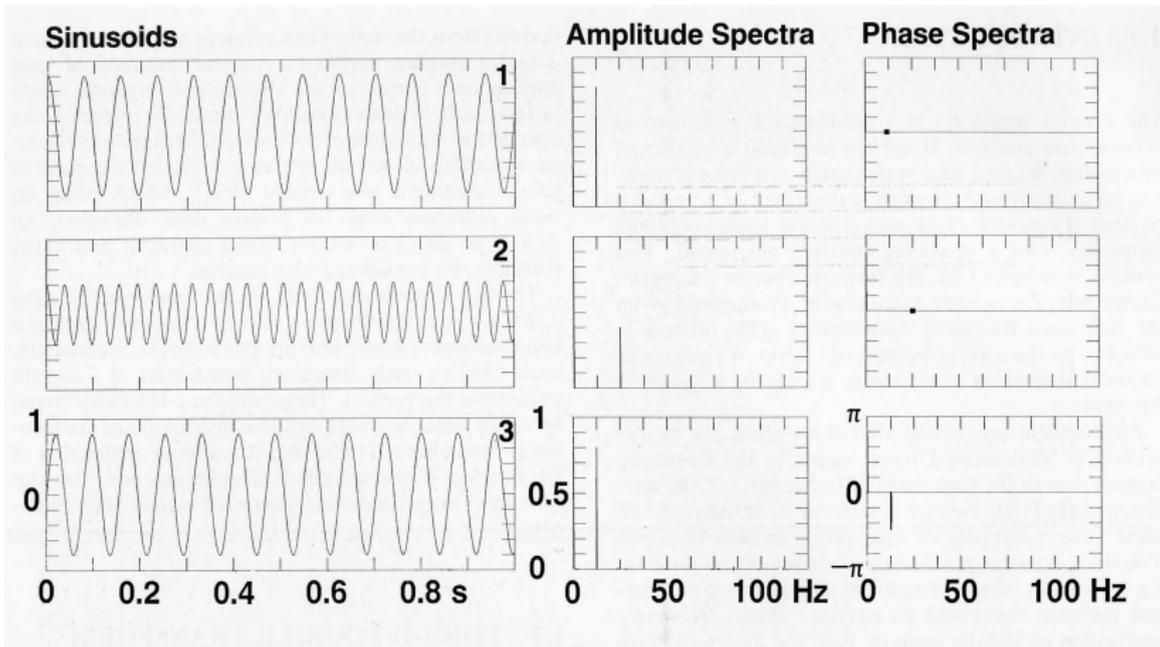
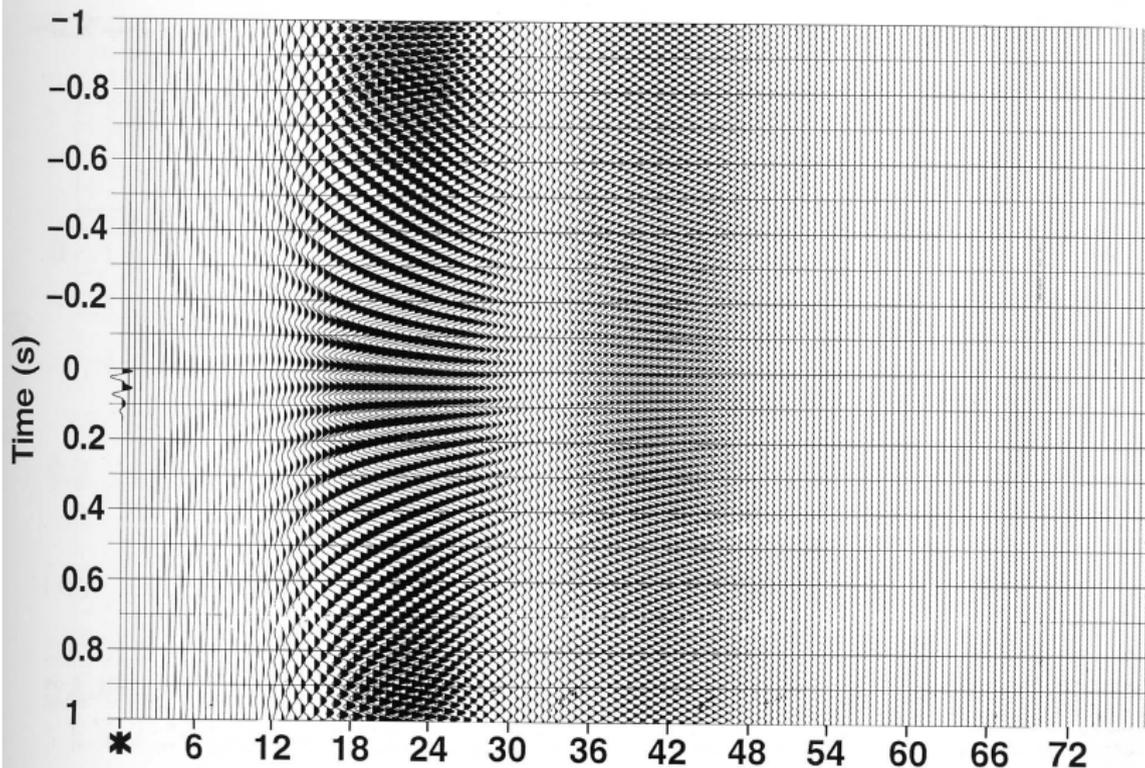
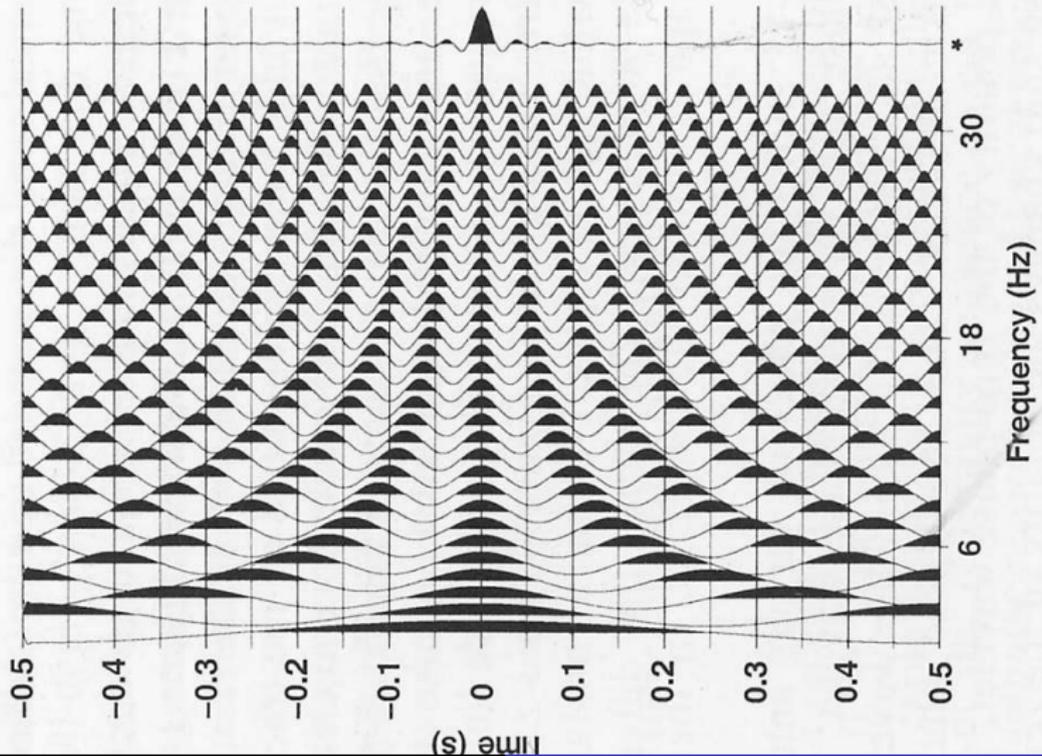
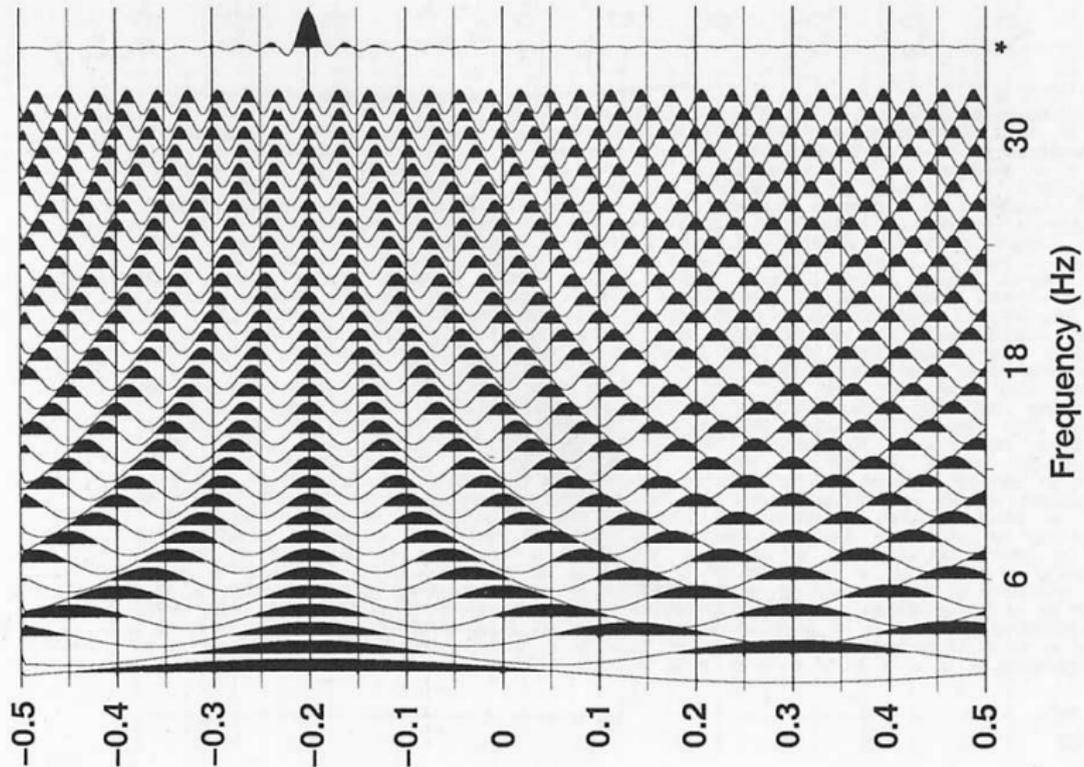


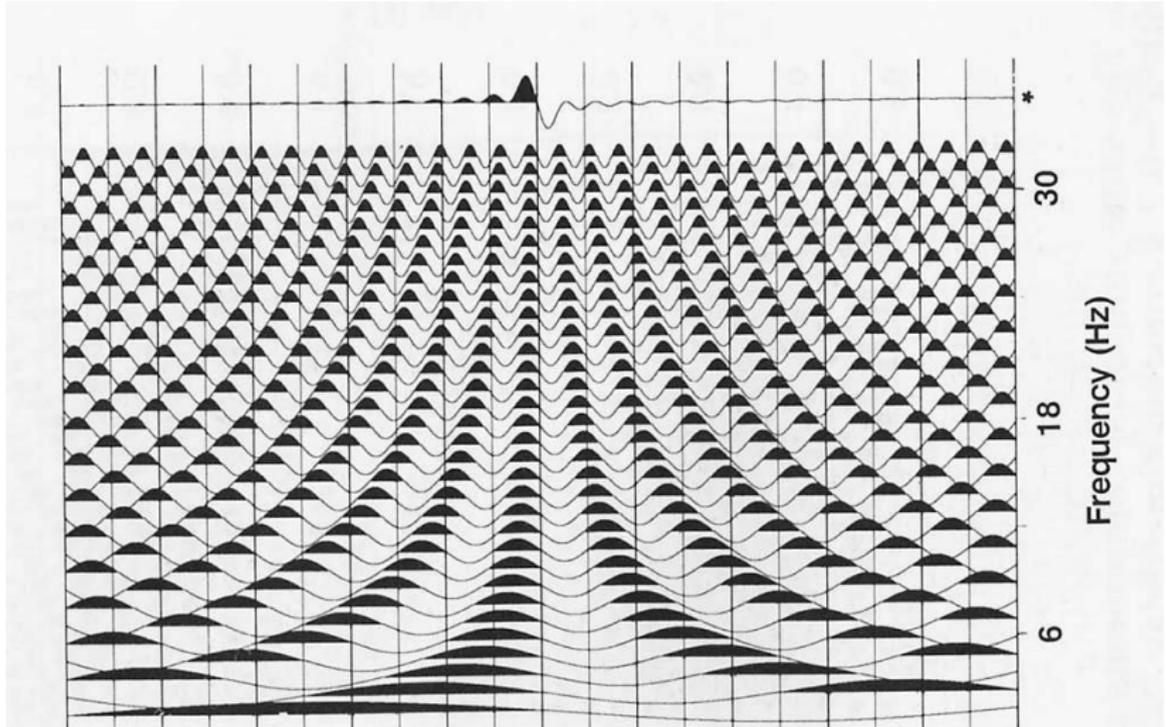
FIG. 1-1. Tracing the motion of a spring in time yields a sinusoidal curve. The peak amplitude represents the maximum displacement of the weight at the end of the spring from the unstretched position. (Positive amplitude corresponds to spring motion in the upward direction.) The time between the two consecutive peaks is the period of the sinusoid, the inverse of which is called frequency. Finally, the time delay of the onset of one spring relative to another is defined as a phase-lag. Phase spectra (the negative of phase-lag spectra) distinguish sinusoids 1 and 3.

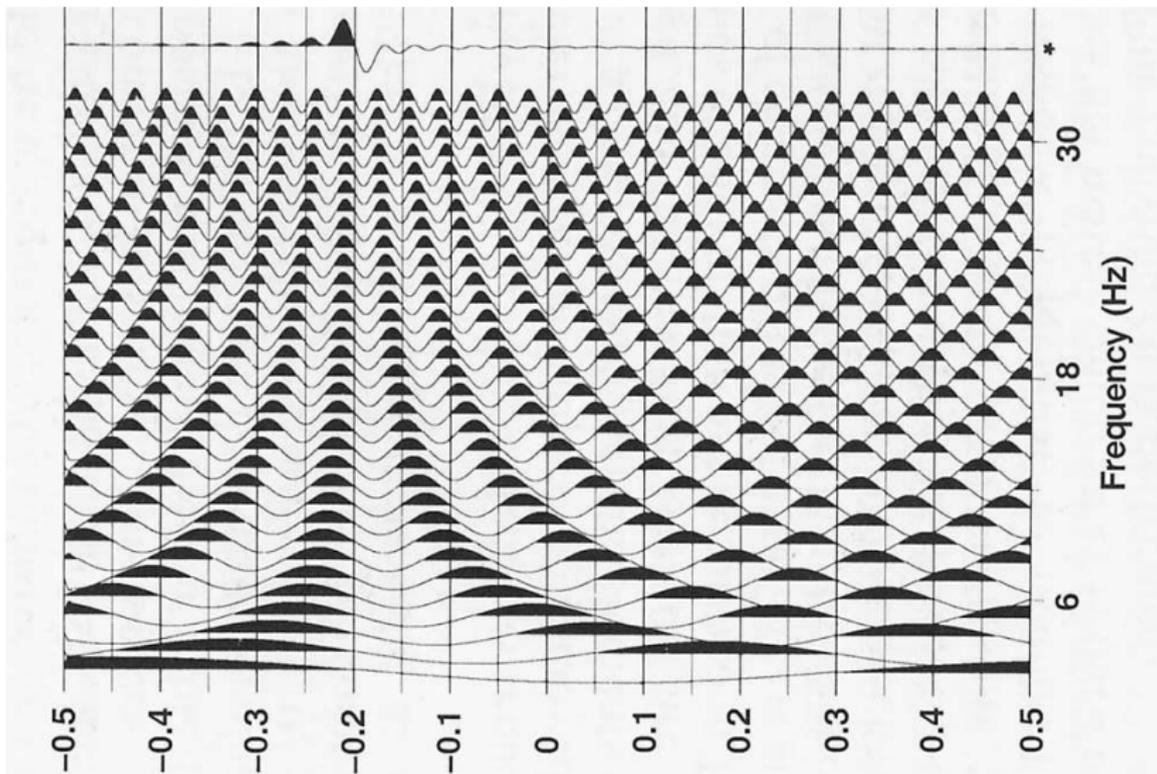












Mathematische Hintergrund

Der mathematische Hintergrund zu (2-5) und (2-6) ist wie folgt.
Man kann zeigen, daß das Doppelintegral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{x(t - \epsilon) + x(t + \epsilon)\} \quad (2-7)$$

ist. Wenn $x(\tau)$ beim Zeitpunkt t stetig ist, so ergibt sich rechts in (2-7) $x(t)$ (und sonst das arithmetische Mittel der Grenzwerte von links und rechts). Das heißt, es gilt:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega. \quad (2-8)$$

Mathematische Hintergrund

Das Integral in der eckigen Klammer ist identisch mit der Fourier-Transformierten (2-6) von $x(t)$, und damit ist (2-8) identisch mit (2-5).

Eine hinreichende Voraussetzung für die Gültigkeit von (2-7) und damit letzten Endes für die Existenz der Fourier-Transformierten $\bar{x}(\omega)$ bei allen ω ist die absolute Integrierbarkeit von $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (2-9)$$

Man erhält auch sinnvolle Fourier-Transformierte in Fällen, wo (2-9) nicht erfüllt ist (siehe Abschnitt (5)).

Amplituden- und Phasenspektrum

Die Fourier-Transformierte $\bar{x}(\omega)$ von $x(t)$ ist im allgemeinen **komplex**:

$$\bar{x}(\omega) = \bar{x}_1(\omega) + i\bar{x}_2(\omega) \quad (2-10)$$

$$\bar{x}_1(\omega) = \text{Realteil}$$

$$\bar{x}_2(\omega) = \text{Imaginärteil}$$

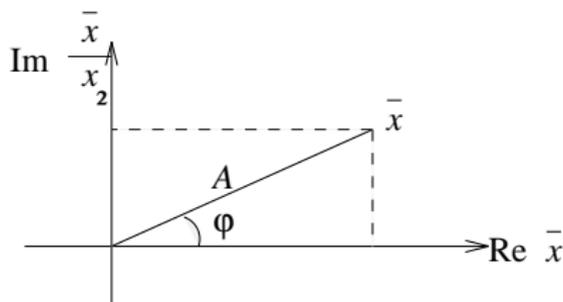
Amplituden- und Phasenspektrum

Eine Alternative zur Zerlegung in Real- und Imaginärteil ist die Zerlegung in Betrag $A(\omega)$ und Phase $\varphi(\omega)$:

$$\bar{x}(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |\bar{x}(\omega)| = (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg \bar{x}(\omega) = \arctan \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$$



$A(\omega)$ heißt **Amplitudenspektrum** (oder spektrale Amplitudendichte) und $\varphi(\omega)$ **Phasenspektrum** von $x(t)$. Für die Fourier-Transformierte $\bar{x}(\omega)$ selbst hat sich auch die Bezeichnung **komplexes Spektrum** (oder kurz Spektrum) von $x(t)$ eingebürgert.

Die anschaulichste Bedeutung von allem soeben eingeführten Funktionen hat $A(\omega)$: diejenigen Frequenzen, bei denen $A(\omega)$ besonders groß ist, sind am stärksten in $x(t)$ vertreten (vgl. die Bemerkung zu den Fourier-Koeffizienten c_n in (2-3) am Ende von Abschnitt (1) auf S. 39).

Reelle Zeitfunktionen

Für reelle $x(t)$ ist die Fourier-Transformierte bei negativen Frequenzen durch die Werte bei positiven Frequenzen festgelegt:

$$\bar{x}(-\omega) = \bar{x}(\omega)^* . \quad (2-11)$$

Dies folgt aus (2-6). Damit gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_1(-\omega) = \bar{x}_1(\omega) \\ A(-\omega) = A(\omega) \end{array} \right\} \text{gerade Funktionen}$$
$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_2(-\omega) = -\bar{x}_2(\omega) \\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \end{array} \right\} \text{ungerade Funktionen}$$

Reelle Zeitfunktionen

Negative Frequenzen sind mathematisch nützlich, enthalten aber wegen (2-11) keine neue Information.

In einigen Fällen ist folgende alternative Form zum Fourier-Integral (2-5) mit Beschränkung auf positive Frequenzen ($\omega \geq 0$) von Interesse. Man setzt (2-10) in (2-5) ein und beachtet, daß $x(t)$ reell ist:

Reelle Zeitfunktionen

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x}_1 + i\bar{x}_2) (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x}_1 \cos \omega t - \bar{x}_2 \sin \omega t) d\omega \quad \leftarrow \text{Integrand gerade in } \omega \\&+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x}_1 \sin \omega t + \bar{x}_2 \cos \omega t) d\omega \quad \leftarrow \text{Integrand ungerade} \\&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\bar{x}_1 \cos \omega t - \bar{x}_2 \sin \omega t) d\omega \\x(t) &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2-12)\end{aligned}$$

Eigenschaften der FT, Reelle Zeitfunktionen

Aus der Definitionsgleichung (2-6) der Fourier-Transformierten $\bar{x}(\omega)$ einer reellen Funktion $x(t)$ folgen einige allgemeine Gesetzmäßigkeiten der Fourier-Transformation, von denen einige wichtige nachstehend angegeben sind.

Wenn $x(t)$ eine gerade Funktion von t ist, so ist $\bar{x}(\omega)$ reell, d.h. (2-10) lautet: $\bar{x}(\omega) = \bar{x}_1(\omega)$. Ist $x(t)$ ungerade, so ist $\bar{x}(\omega)$ rein imaginär: $\bar{x}(\omega) = i\bar{x}_2(\omega)$. Die Nachweise soll der Leser selbst erbringen.

Differentiationsatz

Der **Differentiationsatz** der Fourier-Transformation folgt aus (2-5) durch Differentiation nach t auf beiden Seiten:

$$x'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(\omega) i\omega e^{i\omega t} d\omega$$

Hieraus ergibt sich: Die Fourier-Transformierte der Ableitung von $x(t)$ ist $i\omega\bar{x}(\omega)$, entsteht also durch Multiplikation von $\bar{x}(\omega)$ mit $i\omega$. Die Fourier-Transformierten von höheren Ableitungen folgen durch Multiplikation mit weiteren Faktoren $i\omega$.

Integrationsatz

Aus dem Differentiationsatz folgt der **Integrationsatz** :

Die Fourier-Transformierte des unbestimmten Integrals von $x(t)$,
also

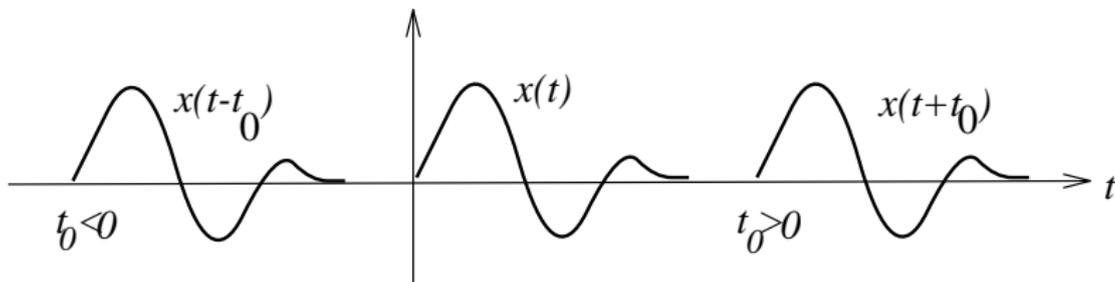
$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

ist

$$\frac{\bar{x}(\omega)}{i\omega}$$

Verschiebungssatz

Schließlich kann man aus (2-5) noch den **Verschiebungssatz** ableiten: Die Fourier-Transformierte der um t_0 verschobenen Funktion $x(t - t_0)$ lautet $\bar{x}(\omega)e^{-i\omega t_0}$. Zeitverschiebung läßt also das Amplitudenspektrum unverändert und ändert das Phasenspektrum $\varphi(\omega)$ in $\varphi(\omega) - \omega t_0$. Man weise den Verschiebungssatz nach.



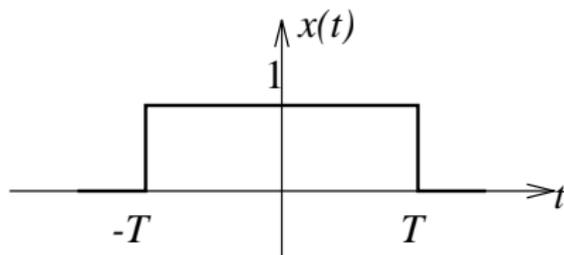
Faltungssatz

Der **Faltungssatz** der Fourier-Transformation wird in Kapitel (3) angegeben, nach der Definition und Erläuterung der Faltungsoperation. Er ist von ähnlicher Bedeutung wie die gerade erwähnten Sätze.

Rechteckfunktion

Die Rechteckfunktion

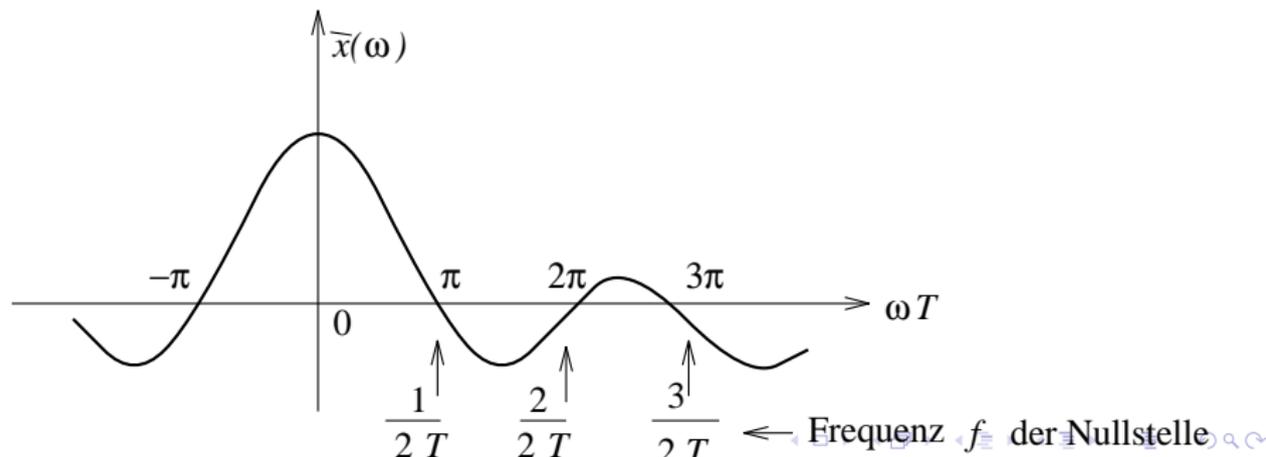
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



hat die Dauer $2T$ und ist eine gerade Funktion. Ihre Fourier-Transformierte folgt aus (2-6):

Rechteckfunktion

$$\bar{x}(\omega) = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = \frac{-1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-T}^{+T} = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \quad (2-13)$$



Rechteckfunktion

$\bar{x}(\omega)$ ist reell, wie man es bei geradem $x(t)$ erwartet. Die **effektive Breite** Δf dieses Spektrums ist der Frequenzabstand der ersten beiden Nullstellen links und rechts von $f = \omega = 0$: $\Delta f = \frac{1}{T}$. Je breiter das Rechteck im Zeitbereich ist, desto schmaler ist sein Spektrum. Das Produkt der effektiven Breite Δf und der Dauer des Rechtecks $\Delta T = 2T$ ist

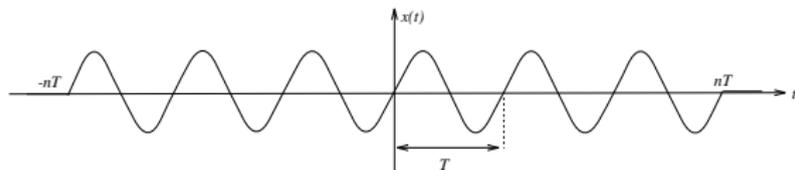
$$\Delta f \cdot \Delta T = 2 \quad (2-14)$$

und damit unabhängig von ΔT .

Sinusschwingung

Die ungerade Sinusschwingung

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & \text{für } |t| \leq nT \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

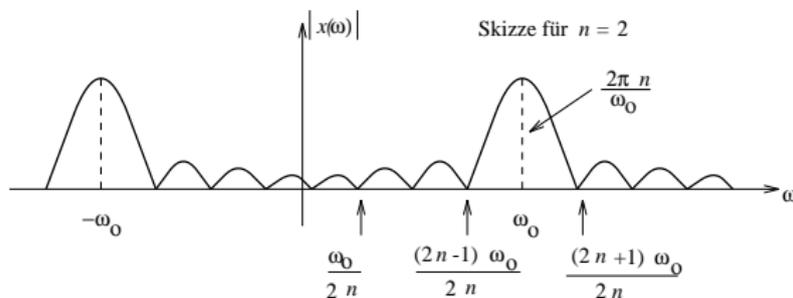


mit der Kreisfrequenz ω_0 bzw. der Periode T hat die Fourier-Transformierte:

Sinusschwingung

$$\begin{aligned}
 \bar{x}(\omega) &= \int_{-nT}^{+nT} \sin \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \int_{-nT}^{+nT} \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} \right) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} e^{i(\omega_0 - \omega)t} + \frac{1}{i(\omega_0 + \omega)} e^{-i(\omega_0 + \omega)t} \right\}_{-nT}^{+nT} \\
 &\underbrace{=}_{\text{mit } e^{\pm i\omega_0 nT} = 1} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{e^{-i\omega nT}}{i(\omega_0 - \omega)} + \frac{e^{-i\omega nT}}{i(\omega_0 + \omega)} \right\} - \frac{1}{2i} \left\{ \frac{e^{i\omega nT}}{i(\omega_0 - \omega)} + \frac{e^{i\omega nT}}{i(\omega_0 + \omega)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega nT} - e^{i\omega nT} \right) \frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \\
 \bar{x}(\omega) &= -2i\omega_0 \frac{\sin \left(2Tn \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\omega^2 - \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

Sinusschwingung



$\bar{x}(\omega)$ ist rein imaginär, wie erwartet. Mit wachsendem n gibt es immer mehr Nebenmaxima, und die Hauptmaxima bei $\pm\omega_0$ werden immer größer.

Sinusschwingung:

Für $n \rightarrow \infty$ geht das Amplitudenspektrum in ein Linienspektrum über mit Energie ausschließlich bei $\omega = \pm\omega_0$.

Die **Linienbreite**, d.h. der Abstand der Nullstellen links und rechts vom Hauptmaximum, ist $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{n}$ bzw. $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi n} = \frac{1}{nT}$.
Die Dauer von $x(t)$ ist $\Delta T = 2nT$. Das Produkt

$$\Delta f \cdot \Delta T = 2 \quad (2-15)$$

ergibt sich wie bei der Rechteckfunktion als unabhängig von ΔT (siehe (2-14)). Die Beziehung $\Delta f \cdot \Delta T = \text{const.}$ ist kein allgemeines Gesetz, sie gilt aber häufiger im folgenden Sinn: Lange (kurze) Zeitfunktionen haben ein schmales (breites) Spektrum.

Deltafunktion

Die Deltafunktion $\delta(t)$ war auf S. 26 definiert worden. Ihre Fourier-Transformierte ist

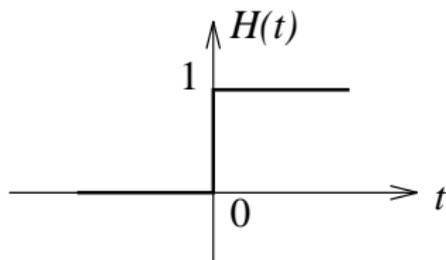
$$\bar{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (2-16)$$

für alle Frequenzen. Alle Frequenzen sind also gleich stark in $\delta(t)$ vertreten, und das Phasenspektrum verschwindet.

Sprungfunktion

Die Sprungfunktion

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



ist das unbestimmte Integral der Deltafunktion, bzw. es gilt:
 $\delta(t) = H'(t)$. Die Fourier-Transformierte $\bar{H}(\omega)$ ergibt sich also aus
(2-16) mit dem Integrationsatz von S. 62:

Sprungfunktion

$$\bar{H}(\omega) = \frac{1}{i\omega}. \quad (2-17)$$

Für $\omega = 0$ gilt $\bar{H}(0) = \infty$. Bei $\omega = 0$ existiert $\bar{H}(\omega)$ also nicht. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß $H(t)$ die Bedingung (2-9) für die Existenz der Fourier-Transformierten verletzt. In der Praxis stört dies aber nicht, und (2-17) wird in vielen Zusammenhängen verwendet.

2.2.1 FT einer periodische Funktion

Die Funktion $x(t)$ mit der Periode T (siehe die Skizze auf S. 36) werde im Grundintervall $0 \leq t \leq T$ durch die Zeitreihe

$$\tilde{x}(t) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{x(k\Delta t)}_{x_k} \delta(t - k\Delta t) \quad (2-18)$$

dargestellt. N ist die Zahl der Stützstellen, und es gilt: $T = N\Delta t$. Die Fourier-Reihe von $\tilde{x}(t)$ lautet

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \frac{t}{T}} \quad (2-19)$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^T \delta(t - k\Delta t) e^{-2\pi i n \frac{t}{T}} dt,$$

die sich durch Einsetzen von (2-18) in (2-4) ergeben. Mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) g(t) dt = g(t_0),$$

einer Verallgemeinerung der bekannten Formel $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
(siehe S. 26), erhält man

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}. \quad (2-20)$$

Die Frequenz, zu der c_n gehört, ist

$$f_n = \frac{n}{T} = \frac{n}{N\Delta t}, \quad (2-21)$$

und der Abstand dieser diskreten Frequenzen beträgt $\frac{1}{T}$. Weiterhin folgt aus (2-20) $c_{-n} = c_n^*$ und $c_{n+N} = c_n$. Die zweite Formel besagt, daß die Fourier-Koeffizienten periodisch sind mit der Periode $\frac{1}{\Delta t}$, also mit der Abtastfrequenz. Von praktischer Bedeutung sind nur die Fourier-Koeffizienten in (2-20) für die Indizes $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ und die zugehörigen Frequenzen (2-21). (Daß die Zeitreihe (2-18) auch bei beliebig hohen Frequenzen Energie besitzt, kommt daher daß die Deltafunktionen in (2-18) diese Eigenschaft haben.)

Die Fourier-Koeffizienten (2-20) erhält man auch auf andere Weise, nämlich durch Verwendung der ursprünglichen Zeitfunktion $x(t)$ und Berechnung ihrer Fourier-Koeffizienten über (2-4) mit Hilfe der Rechteckregel:

$$c_n = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-2\pi i n \frac{k\Delta t}{N\Delta t}} \cdot \Delta t$$

Die Verwendung der Zeitreihe (2-18) entspricht also dem einfachen Integrationsverfahren bei der kontinuierlichen Zeitfunktion. Genauere Verfahren haben sich nicht eingebürgert, nicht zuletzt deswegen, weil sie erheblich zeitaufwendiger sind als die Berechnung von (2-20), für die es außerordentlich effektive Methoden gibt (siehe Abschnitt 3).

2.2.2 Rücktransformation in den Zeitbereich

Setzt man (2-20) in (2-19) ein, so erhält man die Zeitreihe $\check{x}(t)$

zurück, d.h. die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \frac{t}{T}}$ verschwindet für alle t

zwischen den Stützstellen $m\Delta t$, und dort wird sie unendlich (und zwar so, daß die Integraleigenschaften von $\check{x}(t)$ und $x(t)$ über die Stützstellen hinweg gleich sind).

Summiert man über n nicht von $-\infty$ bis ∞ , sondern nur über die n einer Periode (z.B. von 0 bis $N - 1$), so erhält man an den Stützstellen $m\Delta t$ genau den Wert $x_m = x(m\Delta t)$ der Zeitfunktion $x(t)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{2\pi i n \frac{m}{N}} &= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i n \frac{k}{N}}}_{c_n} \cdot e^{2\pi i n \frac{m}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{2\pi i n \frac{m-k}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{m-k}{N}}}_{=\delta_{mk}= \begin{cases} 1 & \text{für } m = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \\
 &= x_m
 \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wird benutzt, daß die Summe von N gleichabständigen Zahlen auf dem Einheitskreis (mit dem Winkelunterschied $2\pi \frac{m-k}{N}$) für $m \neq k$ verschwindet und für $m = k$ gleich N ist. Das Verschwinden im Fall $m \neq k$ kann man sich veranschaulichen, indem man die komplexen Zahlen als Vektoren auffaßt; ihre Summe verschwindet aus Symmetriegründen.

Es gilt also:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}}. \quad (2-22)$$

Die zugehörige Zeit ist $t_k = k\Delta t$, es gilt Periodizität: $x_{k+N} = x_k$,
und die Periode ist $T = N\Delta t$.

Die Gleichungen (2-20) und (2-22) stellen die **diskrete Fourier-Transformation** dar:

$$\left. \begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\
 f_n &= \frac{n}{N\Delta t} \\
 c_{-n} &= c_n^* \\
 c_{n+N} &= c_n \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} c_{-n} \\ c_{n+N} \end{aligned}} \right\} c_{N-n} = c_n^* \\
 x_k &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\
 x_{k+N} &= x_k
 \end{aligned} \right\} (2-23)$$

Im Rahmen der Programmierübungen wird ein Programm zur Fourier-Transformation benutzt, das auf folgender modifizierten Form der diskreten Fourier-Transformation beruht (der wesentliche Unterschied zu (2-23) ist, daß die Indizes bei 1 und nicht bei 0 beginnen):

$$\left. \begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N x_k e^{-2\pi i \frac{(n-1)(k-1)}{N}}, & n = 1, 2, 3, \dots, N \\
 f_n &= \frac{n-1}{N\Delta t} \\
 \left. \begin{aligned}
 c_{-n} &= c_{n+2}^* \\
 c_{n+N} &= c_n
 \end{aligned} \right\} c_{N-n} = c_{2+n}^* \\
 x_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N c_n e^{2\pi i \frac{(n-1)(k-1)}{N}}, & k = 1, 2, 3, \dots, N \\
 t_k &= (k-1)\Delta t \\
 x_{k+N} &= x_k
 \end{aligned} \right\} (2-24)$$

Die Zeitreihe zu (2-24) lautet:

$$\tilde{x}(t) = \Delta t \sum_{k=1}^N \underbrace{x((k-1)\Delta t)}_{x_k} \delta(t - (k-1)\Delta t)$$

2.2.3 FT einer aperiodischen Zeitfunktion

Wenn die aperiodische Funktion $x(t)$ für $t < 0$ und $t > T$ verschwindet, so lautet ihre Fourier-Transformierte:

$$\bar{x}(\omega) = \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2-25)$$

Für die Kreisfrequenzen $\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi n}{T}$ gilt dann folgender Zusammenhang mit den Fourier-Koeffizienten c_n der periodisch fortgesetzten Funktion, die wir bis jetzt betrachtet hatten (Vergleich von (2-25) mit (2-4)):

$$\bar{x}(\omega_n) = \int_0^T x(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{T}} dt = T \cdot c_n = N \Delta t \cdot c_n. \quad (2-26)$$

Dabei ist c_n gemäß (2-23) zu berechnen. Benutzt man (2-24), so gilt:

$$\bar{x}(\omega_n) = \sqrt{N} \Delta t \cdot c_n. \quad (2-27)$$

Für die **Dimension** der Fourier-Koeffizienten bzw. der Fourier-Transformierten folgt aus (2-4) bzw. (2-6) oder (2-25):
Dimension der Fourier-Koeffizienten $c_n =$ Dimension von $x(t)$;
Dimension der Fourier-Transformierten $\bar{x}(\omega)$
= Dimension von $x(t)$ mal Zeit
= Dimension von $x(t)$ durch Frequenz (daher die Bezeichnung **spektrale** = **Amplitudendichte** für $|\bar{x}(\omega)|$ auf S. 55).

2.2.4. Nyquistfrequenz

Es ist plausibel, daß zwischen dem Abtastintervall Δt und dem Frequenzgehalt von $x(t)$ – sei diese Funktion periodisch oder nicht – eine Relation bestehen muß, derart, daß erst bei hinreichend feiner Abtastung die Fourier-Koeffizienten (2-23) und (2-24) bzw. die Fourier-Transformierte (2-26) und (2-27) das Spektrum von $x(t)$ korrekt beschreiben.

Nyquistfrequenz

Eine genauere Untersuchung (siehe Kapitel 4 über das Abtasttheorem) ergibt als Voraussetzung hierfür, daß $x(t)$ keine spektrale Energie oberhalb der sogenannten **Nyquistfrequenz**

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \text{halbe Abtastfrequenz}$$

hat. Wenn also f_{\max} die höchste in $x(t)$ vertretene Frequenz ist, muß Δt so gewählt werden, daß $f_N \geq f_{\max}$ ist.

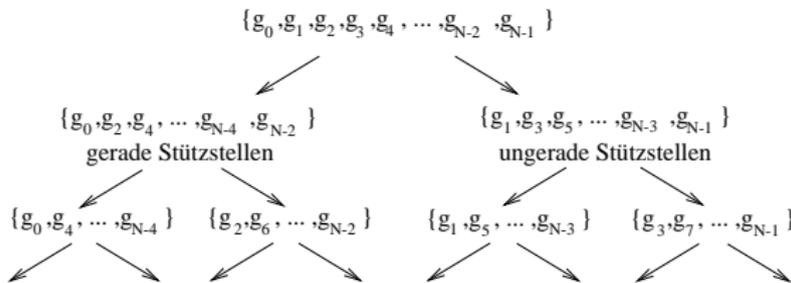
FFT Überblick

Die Schnelle Fourier-Transformation (engl. Fast Fourier Transformation, FFT) basiert auf einem Algorithmus zur schnellen Berechnung der Summen

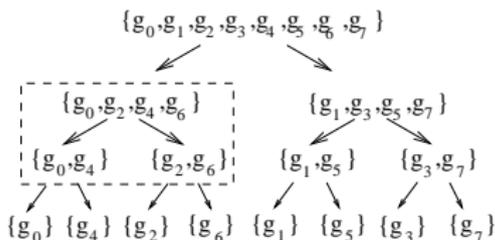
$$\bar{g}_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{\pm 2\pi i \frac{nk}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2-28)$$

Im gebräuchlichsten Fall ist N eine ganzzahlige Potenz von 2. Wenn $\{g_k\}$ eine Zeitreihe ist und das negative Vorzeichen in den e-Termen gewählt wird, sind die \bar{g}_n die Fourier-Koeffizienten der Zeitreihe bis auf den Faktor $\frac{1}{N}$, vergleiche (2-20).

Wenn $\{g_k\}$ eine Folge von Fourier-Koeffizienten und das Vorzeichen in den e -Termen positiv ist, stellen die \bar{g}_n die zugehörige Zeitreihe dar, vergleiche (2-22). Die Berechnung von (2-28) ist also der Kern der Hin- und Rücktransformation in den bzw. aus dem Frequenzbereich. Im Folgenden nehmen wir zur Vereinfachung der Darstellung an, daß $\{g_k\}$ eine Zeitreihe ist, und wählen das Vorzeichen in den e -Termen negativ. Wir nennen dann die \bar{g}_n abgekürzt die Fourier-Koeffizienten von $\{g_k\}$, obwohl eigentlich noch der Faktor $\frac{1}{N}$ dazu multipliziert werden muß. Der erste Schritt der Schnellen Fourier-Transformation ist die fortgesetzte Zerlegung von $\{g_k\}$ in Zeitreihen der halben Länge, und zwar nach folgendem Schema:



Beispiel für $N=2^3=8$:



Die Halbierung hört auf für Zeitreihen der Länge 1.

Im zweiten Schritt versucht man nun, die Fourier-Koeffizienten einer beliebigen Zeitreihe im Schema auf S. 92 aus den Fourier-Koeffizienten der beiden darunterstehenden Zeitreihen zu bestimmen (Beispiel: gerahmter Block auf S. 92. Wenn man die entsprechende Rekursionsformel gefunden hat, ist das Problem gelöst, denn dann beginnt man bei den Zeitreihen der Länge 1, deren Fourier-Koeffizienten gleich den Stützwerten selbst sind, und bestimmt hieraus sukzessive die Fourier-Koeffizienten der Zeitreihen der Länge $2, 4, \dots, \frac{N}{2}$. Eine letzte Anwendung der Rekursionsformel liefert dann die Fourier-Koeffizienten der gegebenen Zeitreihe (die noch mit $\frac{1}{N}$ zu multiplizieren sind).

Rekursion

Gegeben seien die beiden Zeitreihen der Länge $M = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$,

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{M-1}\} \text{ und } \{y_0, y_1, \dots, y_{M-1}\},$$

mit den bekannten Fourier-Koeffizienten

$$\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{M-1}\} \text{ und } \{\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{M-1}\}.$$

Gesucht werden die Fourier-Koeffizienten $\{\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{2M-1}\}$ der Zeitreihe

$$\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{2M-1}\} \equiv \{x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{M-1}, y_{M-1}\}.$$

Mit der Definition

$$V = e^{-\frac{\pi i}{M}}, \quad V^2 = e^{-\frac{2\pi i}{M}} \quad (2-31)$$

folgt aus (2-28):

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_n &= \sum_{l=0}^{M-1} x_l V^{2ln} \\ \bar{y}_n &= \sum_{l=0}^{M-1} y_l V^{2ln} \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (2-32)$$

$$\bar{z}_n = \sum_{l=0}^{2M-1} z_l V^{ln}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2M-1 \quad (2-33)$$

Man formt \bar{z}_n um, indem man getrennt über gerade und ungerade l summiert:

$$\bar{z}_n = \sum_{j=0}^{M-1} z_{2j} V^{2jn} + \sum_{j=0}^{M-1} z_{2j+1} V^{(2j+1)n}$$

$(l = 2j \text{ in (2-33)}) \qquad \qquad \qquad (l = 2j + 1 \text{ in (2-33)})$

Mit $z_{2j} = x_j$ und $z_{2j+1} = y_j$ wird hieraus:

$$\bar{z}_n = \sum_{j=0}^{M-1} x_j V^{2jn} + V^n \sum_{j=0}^{M-1} y_j V^{2jn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2M - 1.$$

(2-34)

Nun betrachten wir zunächst die Indizes $n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ und damit die erste Hälfte der \bar{z}_n . Mit (2-32) folgt aus (2-34):

$$\bar{z}_n = \bar{x}_n + V^n \bar{y}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M - 1. \quad (2-35)$$

Nun folgen die Indizes $n = M, M + 1, \dots, 2M - 1$ für die zweite Hälfte der \bar{z}_n . Mit dem neuen Index $m = n - M$ wird aus (2-34):

$$\bar{z}_n = \sum_{j=0}^{M-1} x_j V^{2j(M+m)} + V^{M+m} \sum_{j=0}^{M-1} y_j V^{2j(M+m)}.$$

Mit $V^{2jM} = (-1)^{2j} = 1$ und $V^M = e^{-\pi i} = -1$ wird hieraus:

$$\bar{z}_n = \sum_{j=0}^{M-1} x_j V^{2jm} - V^m \sum_{j=0}^{M-1} y_j V^{2jm}, \quad n = M, M+1, \dots, 2M-1.$$

Mit (2-32) ergibt sich schließlich $\bar{z}_n = \bar{x}_m - V^M \bar{y}_m$ oder

$$\bar{z}_n = \bar{x}_{n-M} - V^{n-M} \bar{y}_{n-M}, \quad n = M, M+1, \dots, 2M-1. \quad (2-36)$$

Eine andere Schreibweise von (2-35) und (2-36) ist:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_n + V^n \bar{y}_n &= \bar{z}_n \\ \bar{x}_n - V^n \bar{y}_n &= \bar{z}_{n+M} \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (2-37)$$

Dies ist die gesuchte Rekursionsformel. Sie gilt auch für die Rücktransformation von Fourier-Koeffizienten in den Zeitbereich ($V = e^{\frac{\pi i}{M}}$).

Beispiel

Wir wenden (2-37) im Fall von (??) an und brauchen dazu drei Schritte:

1) Viermalige Anwendung mit $M = 1$ auf die Zeitreihenpaare $(\{g_0\}, \{g_4\})$, $(\{g_2\}, \{g_6\})$ etc. bzw. auf ihre Fourier-Koeffizienten:
z.B. Paar $(\{g_0\}, \{g_4\})$: $x_0 = g_0 \rightarrow \bar{x}_0 = g_0$, $y_0 = g_4 \rightarrow \bar{y}_0 = g_4$;
(2-37): $\bar{z}_0 = g_0 + g_4$, $\bar{z}_1 = g_0 - g_4$ Fourier-Koeffizienten von $\{g_0, g_4\}$;

oder Paar $(\{g_2\}, \{g_6\})$: $x_0 = g_2 \rightarrow \bar{x}_0 = g_2$, $y_0 = g_6 \rightarrow \bar{y}_0 = g_6$;
(2-37): $\bar{z}_0 = g_2 + g_6$, $\bar{z}_1 = g_2 - g_6$ Fourier-Koeffizienten von
 $\{g_2, g_6\}$.

Insgesamt werden bei diesem Schritt 8 Fourier-Koeffizienten
berechnet.

2) Zweimalige Anwendung mit $M = 2$, d.h. $V = e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$, auf die Fourier-Koeffizienten der Zeitreihenpaare $(\{g_0, g_4\}, \{g_2, g_6\})$, $(\{g_1, g_5\}, \{g_3, g_7\})$:

z.B. Paar $(\{g_0, g_4\}, \{g_2, g_6\})$:

$$\bar{x}_0 = g_0 + g_4, \quad \bar{x}_1 = g_0 - g_4, \quad \bar{y}_0 = g_2 + g_6, \quad \bar{y}_1 = g_2 - g_6;$$

(2-37):

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z}_0 = g_0 + g_4 + g_2 + g_6 \\ \bar{z}_1 = g_0 + g_4 - g_2 - g_6 \\ \bar{z}_1 = g_0 - g_4 - i(g_2 - g_6) \\ \bar{z}_3 = g_0 - g_4 + i(g_2 - g_6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array} \right\} \text{FK von } \{g_0, g_2, g_4, g_6\}$$

Insgesamt ergeben sich auch hier 8 Fourier-Koeffizienten.

3) Einmalige Anwendung mit $M = 4$ auf die Fourier-Koeffizienten der Zeitreihen

$\{g_0, g_2, g_4, g_6\}$ und $\{g_1, g_3, g_5, g_7\}$:

$\bar{x}_i = \bar{z}_i$ für $i = 0, 1, 2, 3$ aus Schritt 2;

\bar{y}_i für $i = 0, 1, 2, 3$ analog aus Schritt 2 als Fourier-Koeffizienten von $\{g_1, g_3, g_5, g_7\}$.

Anwendung von (2-37) ergibt die 8 Fourier-Koeffizienten der gegebenen Zeitreihe $\{g_0, g_1, \dots, g_6, g_7\}$, nach Multiplikation mit $\frac{1}{N} = \frac{1}{8}$.

Insgesamt sind in diesem Beispiel $8 \cdot 3$ Fourier-Koeffizienten berechnet worden, und bei jedem Fourier-Koeffizient war nach (2-37) eine Addition und eine halbe Multiplikation auszuführen ($V^m \bar{y}_n$ muß nur einmal berechnet werden). Allgemein treten also bei der Schnellen Fourier-Transformation $N \log_2 N$ Additionen und $\frac{N}{2} \log_2 N$ Multiplikationen auf, im Gegensatz zu N^2 Additionen und N^2 Multiplikationen bei der direkten Anwendung von (2-28). Bei $N = 2^{10} = 1024$ ist $N \log_2 N = 1024 \cdot 10 \approx 10^4$, dagegen ist $N^2 \approx 10^6$. Die Rechenzeiterparnis beträgt also ca. 99%!

FFT in FORTRAN

Das Unterprogramm FORK(LX,CX,SIGNI), das aus Claerbout (1976) stammt, führt die Hin- und Rücktransformation mit der Methode der Schnellen Fourier-Transformation gemäß (2-24) aus.

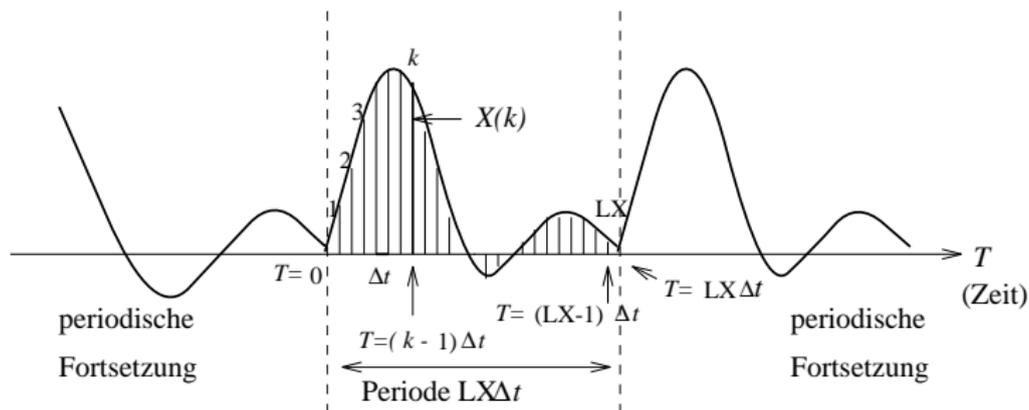
FORTRAN Routine FORK

```
SUBROUTINE FORK(LX,CX,SIGNI)
COMPLEX CX(LX), CARG, CW, CTEMP
PI=3.14159265
J=1
SC=1./FLOAT(LX)
SC=SC*SC
DO 5 I=1,LX
  IF(I.GT.J) GOTO 2
  CTEMP=CX(J)*SC
  CX(J)=CX(I)*SC
  CX(I)=CTEMP
2  M=LX/2
3  IF(J.LE.M) GOTO 5
  J=J-M
  M=m/2
  IF(M.GE.1) GOTO 3
  J=J+M
  L=1
6  ISTEP=2*L
  DO 8 M=1,L
    CARG=CMPLX(0.,1.)*(PI*SIGNI*FLOAT(M-1))/FLOAT(L)
    CW=CEXP(CARG)
    DO 8 I=M,LX,ISTEP
      CTEMP=CW*CX(I+L)
      CX(I+L)=CX(I)-CTEMP
8  CX(I)=CX(I)+CTEMP
  L=ISTEP
  IF(L.LT.LX) GOTO 6
  RETURN
END
```

FFT in FORTRAN

Bei $SIGNI = -1$ werden die Fourier-Koeffizienten zur Zeitreihe $CX(k)$ berechnet ($k = 1, \dots, LX = \text{ganzzahlige Potenz von } 2$). CX muß im Hauptprogramm komplex vereinbart sein: die eigentliche Zeitreihe – im Folgenden $X(k)$ genannt – steht auf dem Realteil, der Imaginärteil ist mit Nullen belegt.

Darstellung der Zeitreihe (Zeitachse, Zeitintervall Δt , Numerierung):

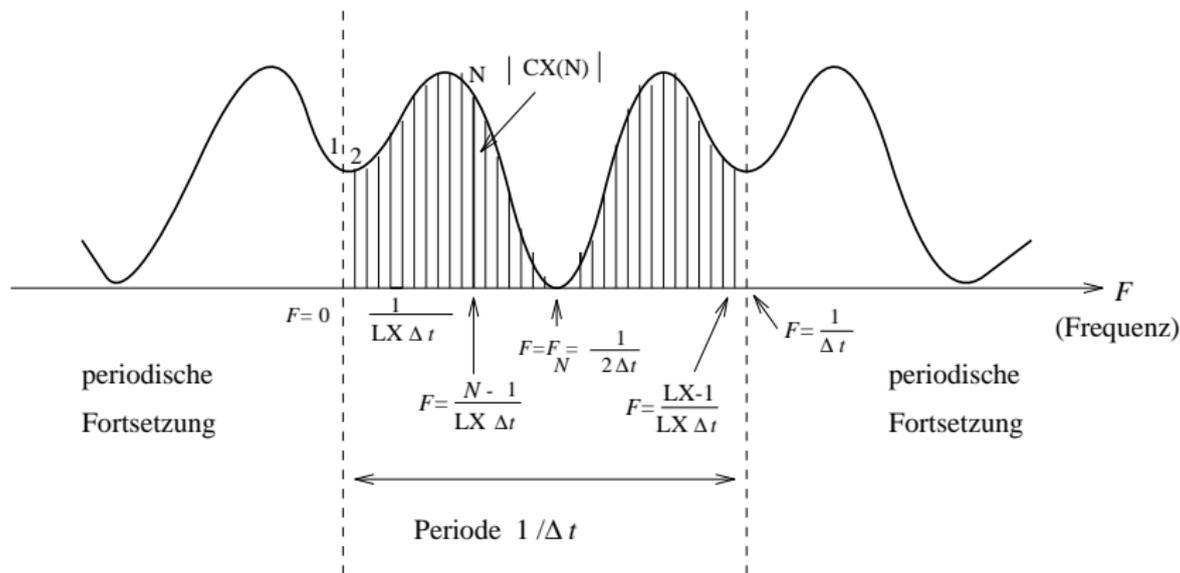


Nach dem Aufruf CALL FORK stehen die Fourier-Koeffizienten auf dem Array CX. Sie werden mit (2-24) berechnet:

$$\left. \begin{aligned} CX(N) &= \frac{1}{\sqrt{LX}} \sum_{k=1}^{LX} x(K) e^{\frac{-2\pi i(N-1)(K-1)}{LX}} \\ F &= \frac{N-1}{LX \cdot \Delta t} \text{ zugehörige Frequenz} \end{aligned} \right\} N = 1, 2, \dots, LX$$

Das Frequenzintervall ist $\frac{1}{LX \cdot \Delta t}$. Die Fourier-Transformierten-Werte der aperiodischen Zeitreihe folgen aus $CX(N)$ durch Multiplikation mit $\sqrt{LX} \Delta t$ gemäß (2-27).

Darstellung des Betrags der Fourier-Koeffizienten der Fourier-Transformierten:



$F_N = \frac{1}{2\Delta t}$ ist die Nyquistfrequenz und hat den Frequenzindex $\frac{LX}{2} + 1$. Relativ zu F_N ist der Realteil von CX gerade und der Imaginärteil ungerade (der Betrag damit gerade). Dies folgt aus der Beziehung $c_{N-n} = c_{2+n}^*$ in (2-24). Die wesentliche Information über das Spektrum der Zeitreihe $X(k)$ ist im Frequenzintervall von $F = 0$ bis $F = F_N$ enthalten. Um sogenanntes Aliasing (d.h. Verfälschung der Fourier-Koeffizienten oder der Fourier-Transformierten für $F < F_N$ durch spektrale Energie bei $F > F_N$) zu vermeiden, muß man F_N hinreichend groß, also Δt hinreichend klein wählen. Dann ist $|CX|$ bei $F = F_N$ auf Null abgeklungen. Hierzu wird in Kapitel 4 über das Abtasttheorem mehr gesagt.

Wenn $\text{SIGNI}=1$ ist, enthält das Array CX die Fourier-Koeffizienten, und FORK berechnet die Zeitreihe gemäß (2-24):

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{\sqrt{LX}} \sum_{N=1}^{LX} CX(N) e^{\frac{+2\pi i(k-1)(N-1)}{LX}} \\ T &= (k-1)\Delta t \text{ zugehörige Zeit} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, LX$$

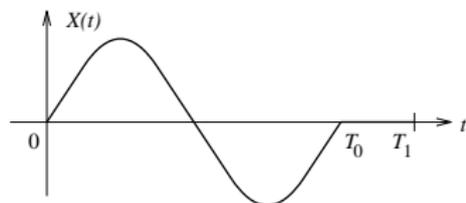
Nach dem Aufruf CALL FORK steht die Zeitreihe auf CX . Wenn die Fourier-Koeffizienten einer reellen Zeitreihe entsprechen, muß der Imaginärteil von CX verschwinden

Aufgabe 1

scriptsize

- 1 Man schreibe ein FORTRAN-Programm, das Folgendes durchführt:
 - 1 Der Impuls

$$X(t) = \begin{cases} \sin \frac{2\pi}{T_0} t & \text{für } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



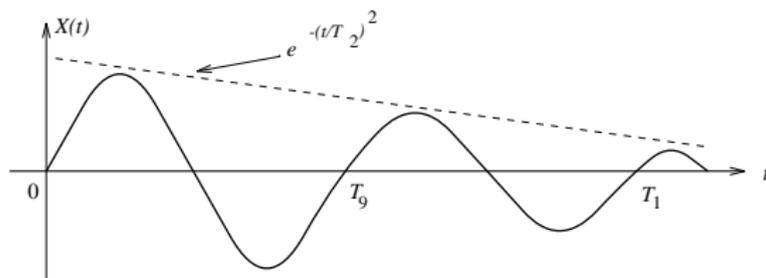
soll zwischen $t = 0$ und $t = T_1 \geq T_0$ berechnet, gelistet und mit dem Unterprogramm KRAKEL von S. 114 geplottet werden. Man

Aufgabe 2

Wie Aufgabe 1, Teil 1, für den Impuls:

$$X(t) = e^{-\left(\frac{t}{T_2}\right)^2} \sin \frac{2\pi}{T_0} t \quad \text{für } 0 \leq t \leq T_1$$

$$T_2 = LTT \cdot \Delta t$$



Zahlenwerte: $LX = 64$, $LT = 20$, $LTT = 10, 20, 40$, $\Delta t = 0.002$ s.

Man bestimme wie auf S. 65 und 70 das Produkt von effektiver Impulsdauer ΔT und der effektiven Breite Δf des Maximums der Fourier-Transformierten (Halbwertsbreite).

Gleichzeitige FT von zwei Zeitreihen

Die beiden Zeitreihen $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ mit $k = 0, 1, \dots, N - 1$ werden zu einer komplexen Zeitreihen $\{g_k\}$ mit

$$g_k = x_k + iy_k$$

vereignet. Dann berechnet man die FK dieser Zeitreihe gemäß (2-28),

$$\bar{g}_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2-38)$$

bzw. praktisch mit der FFT.

Die gesuchten FK \bar{x}_n von $\{x_k\}$ bzw. \bar{y}_n von $\{y_k\}$ bestimmen sich wie folgt aus den \bar{g}_n :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{1}{2} (\bar{g}_0 + \bar{g}_0^*), & \bar{y}_0 &= \frac{1}{2} (\bar{g}_0 - \bar{g}_0^*) \\ \bar{x}_n &= \frac{1}{2} (\bar{g}_n + \bar{g}_{N-n}^*), & \bar{y}_n &= \frac{1}{2i} (\bar{g}_n - \bar{g}_{N-n}^*), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2-39)$$

Nachweis: Aus (2-38) mit $n = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k + iy_k) \\ \bar{g}_0^* = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - iy_k) \end{array} \right\}$$

folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (\bar{g}_0 + \bar{g}_0^*) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k = \bar{x}_0 \\ \frac{1}{2i} (\bar{g}_0 - \bar{g}_0^*) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k = \bar{y}_0 \end{array} \right\}.$$

Aus (2-38) mit $n = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}_n = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k + iy_k) e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} \\ \bar{g}_{N-n}^* = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - iy_k) e^{+2\pi i \frac{(N-n)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - iy_k) e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} \end{array} \right\}$$

folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (\bar{g}_n + \bar{g}_{N-n}^*) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} = \bar{x}_n \\ \frac{1}{2i} (\bar{g}_n - \bar{g}_{N-n}^*) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} = \bar{y}_n \end{array} \right\}.$$

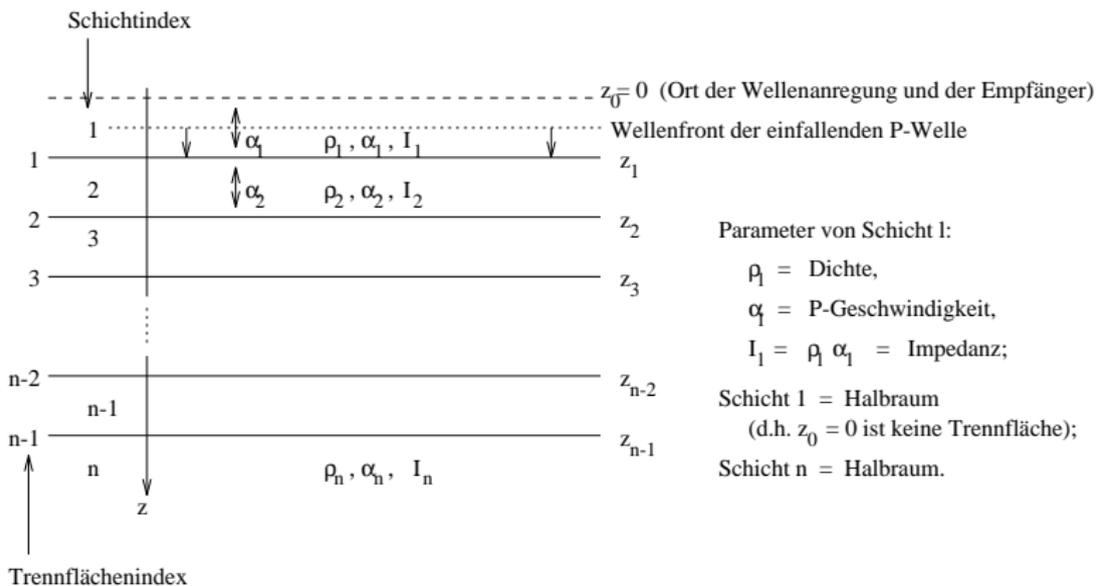
Benutzt man zur Berechnung der \bar{g}_n in (2-38) das Unterprogramm FORK, so läuft der Index n nicht von 0 bis $N - 1$, sondern von 1 bis N . Entsprechend muß in (2-39) der Index 0 durch 1 ersetzt werden, und n läuft dort von 2 bis $\frac{N}{2} + 1$.
Wie transformiert man gleichzeitig zwei Spektren zurück?

Synthetische Seismogramme

Für die späteren Anwendungen von Verfahren der digitalen Signalverarbeitung (wie z.B. Filtermethoden) brauchen wir Zeitreihen. Wir berechnen uns hierzu synthetische Seismogramme für ein geschichtetes Medium. Dabei kann man gleichzeitig lernen, wie man ein Problem der Wellenausbreitung mit Hilfe der Fourier-Transformation löst.

Das elastische Medium besteht aus einem homogenen Halbraum, der über einem geschichteten Halbraum liegt. Im homogenen Halbraum läuft eine ebene P-Welle vertikal nach unten. Sie wird am geschichteten Halbraum reflektiert und gebrochen.

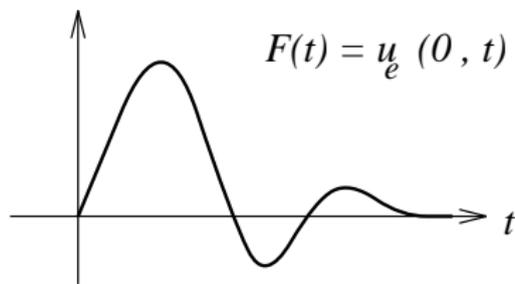
Modell



Einfallende Welle

Die z-Komponente der Verschiebung der **einfallenden P-Welle** sei

$$u_e(z, t) = F\left(t - \frac{z}{\alpha_1}\right). \quad (2-40)$$



Wir suchen hierzu die Verschiebung $u_r(z, t)$ der reflektierten Welle, bestehend aus Primärreflexionen und Multiplen, für $z = z_0 = 0$. u_e und u_r sind positiv bei Verschiebung in $+z$ -Richtung.

Harmonische Anregung

Zunächst sei $F(t)$ in (2-40) harmonisch mit der Kreisfrequenz ω :

$$u_e(z, t) = e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\alpha_1}\right)}. \quad (2-41)$$

Die Wellengleichung legt folgenden allgemeinen Ansatz für die zugehörige Verschiebung in der l -ten Schicht nahe:

$$u_l(z, t) = \underbrace{A_l e^{i\omega\left(t - \frac{z-z_{l-1}}{\alpha_l}\right)}}_{\text{Wellen in } +z\text{-Richtung mit der Amplitude } A_l} + \underbrace{B_l e^{i\omega\left(t + \frac{z-z_{l-1}}{\alpha_l}\right)}}_{\text{Wellen in } -z\text{-Richtung mit der Amplitude } B_l}. \quad (2-42)$$

Wir betrachten zunächst den Index $l = 1$. In diesem Fall ist der erste Term in (2-42) die einfallende Welle (2-41), und es gilt $A_1 = 1$. Der zweite Term ist die gesuchte reflektierte Welle, und $B_1 = R$ ist der i.a. komplexe **Reflexionskoeffizient** oder die **Reflektivität** des Mediums unterhalb von $z = z_0$.

Dann betrachten wir den Index $l = n$. In diesem Fall ist der erste Term in (2-42) die gebrochene oder transmittierte Welle, und $A_n = T$ ist der **Transmissionskoeffizient** oder die **Transmissivität** der Schichten zwischen $z = z_0$ und $z = z_{n-1}$. Der zweite Term verschwindet: $B_n = 0$, denn aus dem homogenen Halbraum n kann nichts zurückreflektiert werden.

Die Koeffizienten A_l und B_l , außer A_1 und B_n , werden aus den Randbedingungen für die Trennflächen $z = z_l$ ($l = 1, 2, \dots, n - 1$) bestimmt:

$$\begin{aligned} u_l(z_l, t) &= u_{l+1}(z_l, t) && \text{Verschiebung ist stetig} \\ \rho_l \alpha_l^2 \frac{\partial u_l}{\partial z}(z_l, t) &= \rho_{l+1} \alpha_{l+1}^2 \frac{\partial u_{l+1}}{\partial z}(z_l, t) && \text{Normalspannung ist stetig} \end{aligned}$$

wobei die Spannung-Dehnungsbeziehung $p_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ benutzt wurde. Die Normalspannung hier ist $p_{33} = p_{zz}$ also $p_{zz} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{zz}$ bzw. $p_{zz} = \rho \alpha^2 \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Einsetzen von (2-42) ergibt:

$$\begin{aligned} A_I e^{-i\omega \frac{d_I}{\alpha_I}} + B_I e^{+i\omega \frac{d_I}{\alpha_I}} &= A_{I+1} + B_{I+1} \\ \rho_I \alpha_I \left[-A_I e^{-i\omega \frac{d_I}{\alpha_I}} + B_I e^{+i\omega \frac{d_I}{\alpha_I}} \right] &= \rho_{I+1} \alpha_{I+1} [-A_{I+1} + B_{I+1}] \end{aligned}$$

Diese Gleichungen löst man nach A_{l+1} und B_{l+1} auf:

$$A_{l+1} = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{l_l}{l_{l+1}} \right) A_l e^{-i\omega \frac{d_l}{\alpha_l}} + \left(1 - \frac{l_l}{l_{l+1}} \right) B_l e^{+i\omega \frac{d_l}{\alpha_l}} \right\}$$
$$B_{l+1} = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{l_l}{l_{l+1}} \right) A_l e^{-i\omega \frac{d_l}{\alpha_l}} + \left(1 + \frac{l_l}{l_{l+1}} \right) B_l e^{+i\omega \frac{d_l}{\alpha_l}} \right\}$$

Dies ist eine Verknüpfung der **Spaltenvektoren**

$\begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A_{l+1} \\ B_{l+1} \end{pmatrix}$ über eine **Schichtmatrix**:

$$\begin{pmatrix} A_{l+1} \\ B_{l+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{l_l}{l_{l+1}}\right) e^{-i\omega \frac{d_l}{\alpha_l}} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l_l}{l_{l+1}}\right) e^{+i\omega \frac{d_l}{\alpha_l}} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l_l}{l_{l+1}}\right) e^{-i\omega \frac{d_l}{\alpha_l}} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{l_l}{l_{l+1}}\right) e^{+i\omega \frac{d_l}{\alpha_l}} \end{pmatrix}}_{2 \times 2\text{-Schichtmatrix } \underline{m}_{l+1}} \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} \quad (2-43)$$

Wiederholte Anwendung von (2-43) führt auf eine Verknüpfung der Vektoren $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$ über die **Produktmatrix** M von Schichtmatrizen:

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \underbrace{m_n \cdot m_{n-1} \cdot \dots \cdot m_3 \cdot m_2}_{\underline{M}} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (2-44)$$

\underline{M} hängt von den Parametern α_l , d_l und l_l aller Schichten ab ($l = 1, 2, \dots, n$) und von der Frequenz ω . \underline{M} kann numerisch auf Rechenmaschinen berechnet werden. Mit $A_1 = 1$, $B_n = 0$, $B_1 = R$ und $A_n = T$ erhält man aus (2-44) zwei Gleichungen für R und T :

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} T = M_{11} + M_{12}R \\ 0 = M_{21} + M_{22}R \end{array} \right\}$$

Hieraus folgt schließlich:

$$R = -\frac{M_{21}}{M_{22}}, \quad T = M_{11} - \frac{M_{12}M_{21}}{M_{22}}. \quad (2-45)$$

Reflektionskoeffizient (Reflektivität) R und Transmissionskoeffizient (Transmissivität) T berechnen sich also über die Produktmatrix \underline{M} . Außer in ganz einfachen Fällen sind diese Koeffizienten stark frequenzabhängig und komplex: Es gibt Frequenzen mit **konstruktiver Interferenz** der Wellen in dem geschichteten Medium (große Koeffizienten) und Frequenzen mit **destruktiver Interferenz** (kleine bzw. verschwindende Koeffizienten).

Aus (2-42) folgen schließlich die **reflektierte Welle** ($l = 1$)

$$u_r(z, t) = R(\omega) e^{i\omega \left(t + \frac{z}{\alpha_1} \right)} \quad (2-46)$$

und die transmittierte oder **gebrochene Welle** ($l = n$)

$$u_t(z, t) = T(\omega) e^{i\omega \left(t - \frac{z - z_{n-1}}{\alpha_n} \right)}$$

Impulsfall

Nun gehen wir über zum Impulsfall und benutzen dabei die Fourier-Transformation. Wir stellen die einfallende Welle (2-40) durch ein Fourier-Integral dar:

$$u_e(z, t) = F\left(t - \frac{z}{\alpha_1}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega\left(t - \frac{z}{\alpha_1}\right)} d\omega$$

Dies ist eine Superposition von ebenen Wellen vom Typ (2-41). Für $\bar{F}(\omega)$ gilt:

$$\bar{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$$

Letztere Gleichung entspricht der Fourier-Transformierten der einfallende Welle $u_I(0, t)$

Die zugehörige Reflexion, auf die wir uns beschränken, entsteht durch analoge Superposition der zu (2-41) gehörigen reflektierten Wellen (2-46):

$$u_r(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) R(\omega) e^{i\omega\left(t + \frac{z}{\alpha_1}\right)} d\omega$$

Die Fourier-Transformierte der reflektierten Welle ist also

$$\bar{u}_r(z, \omega) = \bar{F}(\omega) R(\omega) e^{i\omega \frac{z}{\alpha_1}},$$

und das **synthetische Seismogramm** für $z = z_0 = 0$ lautet:

$$u_r(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) R(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2-47)$$

Ablauf der Berechnung

Der **Gang der Rechnung** ist wie folgt:

- 1 Berechnung der Reflektivität $R(\omega)$ über (2-45) mit (2-44) und (2-43);

Ablauf der Berechnung

Der **Gang der Rechnung** ist wie folgt:

- 1 Berechnung der Reflektivität $R(\omega)$ über (2-45) mit (2-44) und (2-43);
- 2 Multiplikation mit der Fourier-Transformierten $\bar{F}(\omega)$ der einfallenden Welle;

Ablauf der Berechnung

Der **Gang der Rechnung** ist wie folgt:

- 1 Berechnung der Reflektivität $R(\omega)$ über (2-45) mit (2-44) und (2-43);
- 2 Multiplikation mit der Fourier-Transformierten $\bar{F}(\omega)$ der einfallenden Welle;
- 3 Inverse Fourier-Transformation (2-47).

Zweischichten-Fall

Im **einfachen Fall** $n = 2$ kann man die Rechnung analytische durchführen und erhält (bitte nachweisen):

$$R(\omega) = \frac{\rho_1 \alpha_1 - \rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2} e^{-2i\omega \frac{d_1}{\alpha_1}}$$
$$u_r(0, t) = \frac{\rho_1 \alpha_1 - \rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2} F\left(t - \frac{2d_1}{\alpha_1}\right) \quad (2-48)$$

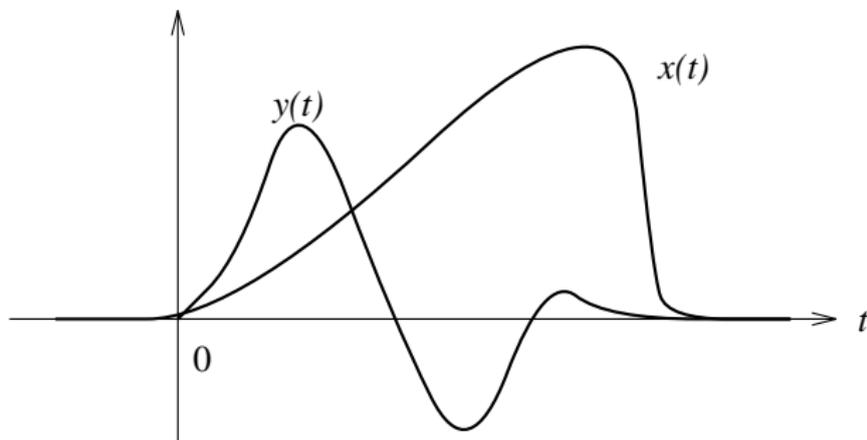
Abbildungen zum Erdfilter

Die folgenden Abbildungen wurden im Rahmen der BSc-Arbeit von Christina Raub erstellt. Es kam der eben beschriebene Algorithmus zum Einsatz, der mit Hilfe von MatLab realisiert wurde.

Faltung im Zeitbereich

Die Faltung $z(t)$ zweier Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ ist wie folgt definiert:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau. \quad (3-49)$$

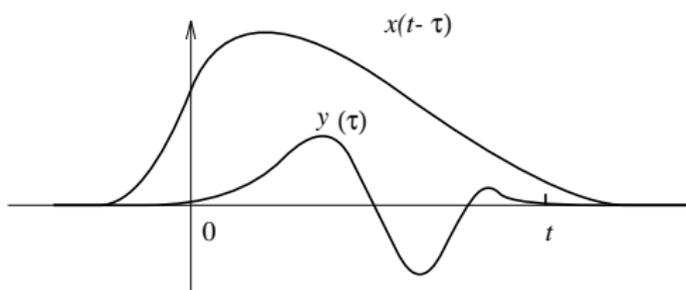
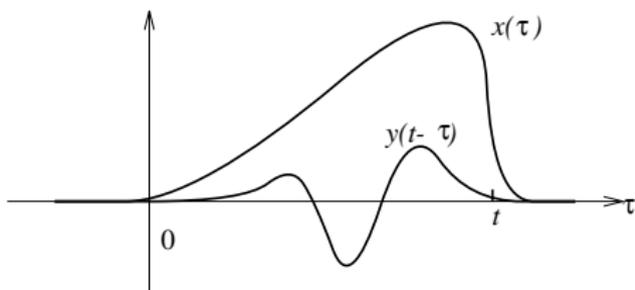


Durch Variablensubstitution (z.B. $\vartheta = t - \tau$) ergibt sich der äquivalente Ausdruck

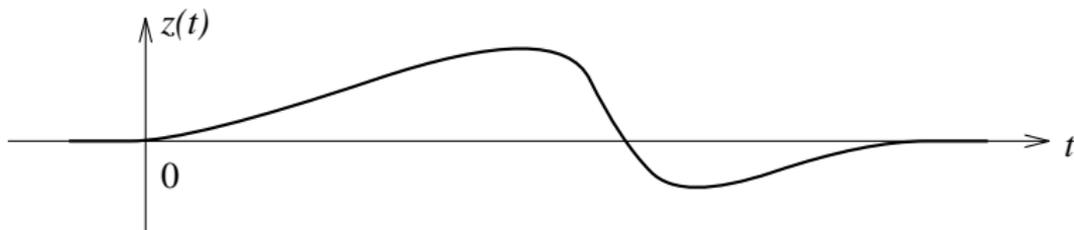
$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t - \tau)d\tau, \quad (3-50)$$

d.h. man kann die Argumente von x und y vertauschen, ohne daß sich am Resultat etwas ändert. In der Skizze oben ist angenommen, daß x und y für $t < 0$ verschwinden. (3-49) und (3-50) gelten aber auch in anderen Fällen.

Graphische Veranschaulichung von (3-49)
(linke Skizze) und (3-50) (rechte Skizze) für einen festen Wert von t :



Das Faltungsergebnis $z(t)$ sieht in diesem Beispiel etwa so aus:



Für die Faltung hat sich eine symbolische Schreibweise eingebürgert:

$$z(t) = x(t) * y(t) \text{ für (3-49)}$$

$$z(t) = y(t) * x(t) \text{ für (3-50)}$$

Dabei ist impliziert, daß der jeweils erste "Faktor" dann, wenn er in der ausführlichen Schreibweise der Faltung auftritt, von τ abhängt und der zweite von $t - \tau$. Die symbolische Schreibweise macht verständlich, daß die Faltung als **kommutative Operation** bezeichnet wird. Die Kommutativität bezieht sich aber, wie oben erläutert, auf die Argumente der Funktionen und nicht auf diese selbst.

Beim **Übergang zu Zeitreihen** und dem Abtastintervall Δt und unter der Annahme $x(t) = y(t) = 0$ für $t < 0$ gilt:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{x((n-1)\Delta t)}_{x_n} \delta(t - (n-1)\Delta t)$$

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{y((n-1)\Delta t)}_{y_n} \delta(t - (n-1)\Delta t)$$

$$\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) * \tilde{y}(t) = \tilde{y}(t) * \tilde{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{z((n-1)\Delta t)}_{z_n} \delta(t - (n-1)\Delta t)$$

Die unbekanntenen Koeffizienten z_n folgen aus (3-49) oder (3-50) durch Integration gemäß der Rechteckregel:

$$z_n = \Delta t \sum_{k=1}^n x_k y_{n+1-k} = \Delta t \sum_{k=1}^n y_k x_{n+1-k}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3-51)$$

Die ersten drei Koeffizienten sind:

$$z_1 = x_1 y_1 \Delta t$$

$$z_2 = (x_1 y_2 + x_2 y_1) \Delta t$$

$$z_3 = (x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1) \Delta t$$

Faltung im Frequenzbereich

In Abschnitt 4 waren einige Sätze erwähnt worden, die zu Operationen im Zeitbereich wie Differentiation, Integration und Verschiebung die entsprechenden Operationen im Frequenzbereich angeben Analog kann man fragen, wie die Frequenzbereichsoperation zur Faltung (3-49) oder (3-50) aussieht. Die Antwort gibt der **Faltungssatz**:

Die Fourier-Transformierte $\bar{z}(\omega)$ der Faltung $z(t) = x(t) * y(t)$ ist $\bar{z}(\omega) = \bar{x}(\omega) \cdot y(\omega)$ und damit das Produkt der Fourier-Transformierten der miteinander gefalteten Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

Beweis:

Es gelten zunächst die Fourier-Integrale mit den Fourier-Transformierten:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \bar{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3-52)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \bar{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3-53)$$

Dann gilt mit (3-49) und (3-52):

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega y(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(\omega) y(t - \tau) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau \end{aligned}$$

Vertauschung der Integrationen ergibt:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) e^{i\omega\tau} d\tau d\omega \\
 &\underbrace{=} \\
 &\text{mit} \\
 \vartheta &= t - \tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(\omega) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} y(\vartheta) e^{-i\omega\vartheta} d\vartheta d\omega
 \end{aligned}$$

Mit (3-53) erhält man

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(\omega) \bar{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

woraus schließlich $\bar{z}(\omega) = \bar{x}(\omega) \bar{y}(\omega)$ folgt. Damit ist der Faltungssatz bewiesen.

Beispiel

Das synthetische Seismogramm nach Formel (2-47) lautet (das Argument $z = 0$ ist weggelassen):

$$\left. \begin{aligned} u_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}(\omega) R(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}_r(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \overline{u}_r(\omega) &= \overline{F}(\omega) \cdot R(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3-54)$$

Die Fourier-Transformierte des Seismogramms ist das Produkt von Funktionen, die Fourier-Transformierten sind bzw. als solche interpretiert werden können.

Mit den Zeitbereichsfunktionen

$$\begin{aligned} F(t) & \text{ von } \bar{F}(\omega), \\ I(t) & \text{ von } R(\omega) \end{aligned}$$

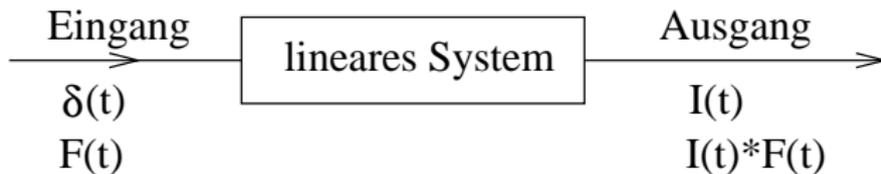
entspricht (3-54) der Faltung

$$u_r(t) = F(t) * I(t). \quad (3-55)$$

$I(t)$ ist nach (3-54) das synthetische Seismogramm für das Signal $F(t)$ mit $\bar{F}(\omega) = 1$. $F(t)$ ist also nach (2-16) die Deltafunktion $\delta(t)$. Daher heißt $I(t)$ **Impulsseismogramm**, denn $F(t) = \delta(t)$ stellt eine impulshafte Anregung dar.

(3-55) bedeutet: Kennt man das Impulsseismogramm $I(t)$, so folgt das synthetische Seismogramm für beliebige Anregung $F(t)$ durch Faltung von $I(t)$ und $F(t)$.

Diese Aussage gilt allgemein für lineare Systeme, also Systeme, die durch lineare Differentialgleichungen (wie z.B. die Wellengleichung) beschrieben werden. Beispiele sind mechanische Schwinger, elektrische Schaltungen oder auch ausgedehnte Körper, in denen sich Wellen ausbreiten oder Wärme transportiert wird. Solche Systeme werden schematisch durch ein Blockdiagramm der folgenden Art dargestellt:



Das System wird durch die Eingangsfunktion angeregt und produziert dabei die Ausgangsfunktion. Es genügt, das Problem für den Eingang $\delta(t)$ zu lösen, d.h. die **Impulsantwort** $I(t)$ zu bestimmen. $I(t)$ heißt auch **Greensche Funktion** des Systems.

Aufgabe 4: Man schreibe ein Unterprogramm für die Faltung, basierend auf Formel (3-51). Dann wiederhole man Teil 2c) der Aufgabe 3 (ergibt das Impulseismogramm) und falte das Resultat mit dem Eingangssignal von Teil 2a). Es muß sich dasselbe Seismogramm wie in der Aufgabe 3 ergeben.

Abtasttheorem

In Abschnitt 4 war die Nyquistfrequenz $f_N = \frac{1}{2\Delta t}$ eingeführt und als entscheidende Größe für die Abtastung einer Zeitfunktion bezeichnet worden. Der Nachweis, daß die Abtastung mit dem Zeitintervall Δt dann richtig durchgeführt wird, wenn $f_N \geq f_{\max}$ ist, der höchsten in $x(t)$ vertretenden Frequenz, kann nun, nach Behandlung der Faltung in Kapitel 3, geliefert werden.

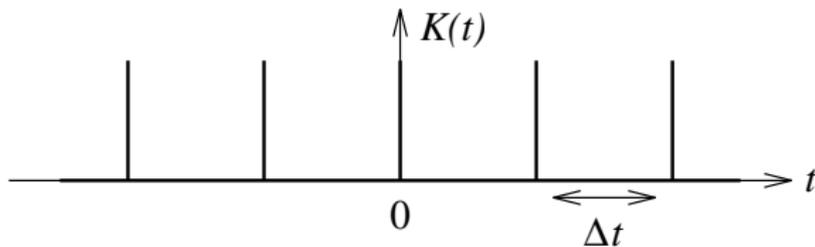
Beim Abtasten von $x(t)$ entsteht die Zeitreihe $\tilde{x}(t)$. Es ist daher sinnvoll zu untersuchen, welche Relation die Fourier-Transformierte $\bar{x}(\omega)$ und $\overline{\tilde{x}}(\omega)$ miteinander haben, und die Abtastung mit solchen Δt als richtig (im Sinne von hinreichend) anzusehen, bei denen $\overline{\tilde{x}}(\omega)$ mit $\bar{x}(\omega)$ im Bereich $0 \leq \omega \leq \omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$ übereinstimmt.

Wir verwenden für die Zeitreihe die Form (1-4):

$$\tilde{x}(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \delta(t - k\Delta t)$$

Mit der **Kammfunktion**

$$K(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \quad (4-1)$$

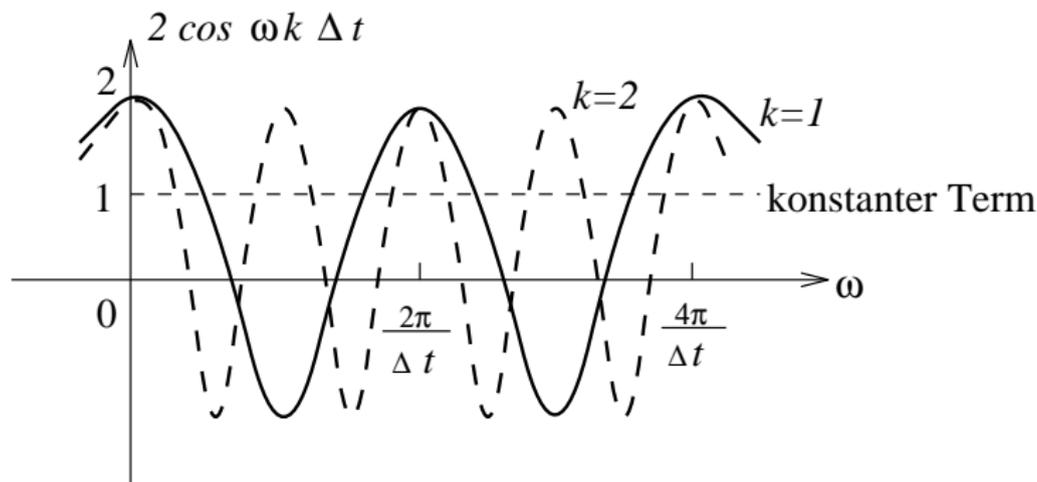


gilt

$$\tilde{x}(t) = x(t)K(t)\Delta t. \quad (4-2)$$

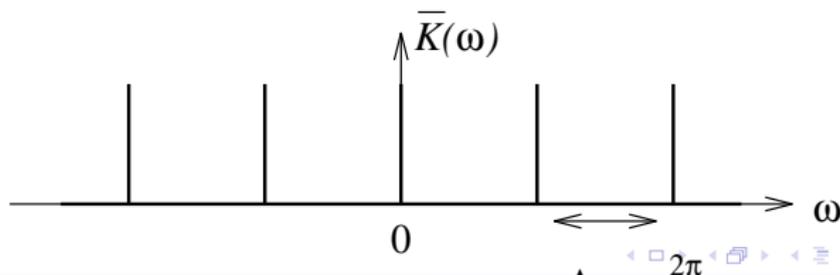
Wir gehen weiter unten in den Frequenzbereich und brauchen dazu die Fourier-Transformierte von (4-1):

$$\bar{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k\Delta t} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \omega k\Delta t. \quad (4-3)$$



Die Skizze zeigt die ersten drei Terme in (4-3). Sie veranschaulicht, daß für $\omega \Delta t = 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), also für $\omega = n \frac{2\pi}{\Delta t}$, (4-3) über alle Grenzen wächst. Für alle übrigen ω sind die unendlich vielen Exponentialterme in der ersten Reihendarstellung von $\bar{K}(\omega)$ gleichmäßig über den Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene verteilt, so daß ihre Summe verschwindet. Damit ist $\bar{K}(\omega)$ ebenfalls eine Kammfunktion:

$$\bar{K}(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}\right). \quad (4-4)$$



Der Faktor $\frac{2\pi}{\Delta t}$ in (4-4) ergibt sich durch Integration von $\overline{K}(\omega)$ in der Form (4-3) über das Intervall von $n\frac{2\pi}{\Delta t} - \epsilon$ bis $n\frac{2\pi}{\Delta t} + \epsilon$ mit beliebig kleinem ϵ . Für jedes beliebige n ergibt sich dasselbe wie für $n = 0$:

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega k \Delta t} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega k \Delta t}{k \Delta t} \Big|_{-\epsilon}^{+\epsilon} = \frac{2}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \epsilon k \Delta t}{\epsilon k \Delta t} \epsilon \Delta t$$

$$= \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\text{mit } x_k = k\epsilon \Delta t \\ \text{und } \Delta x = x_{k+1} - x_k}} = \frac{2}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x_k}{x_k} \Delta x = \frac{2}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

Damit ist (4-4) bewiesen.

Nun können wir (4-2) benutzen, um die Fourier-Transformierte $\tilde{x}(\omega)$ zu bestimmen. Wegen der Symmetrie der Fourier-Transformation gilt nämlich, daß so, wie Faltung im Zeitbereich und Multiplikation im Frequenzbereich einander entsprechen, zur Multiplikation im Zeitbereich die Faltung im Frequenzbereich gehört: Es gilt (Nachweis analog zu Abschnitt 2):

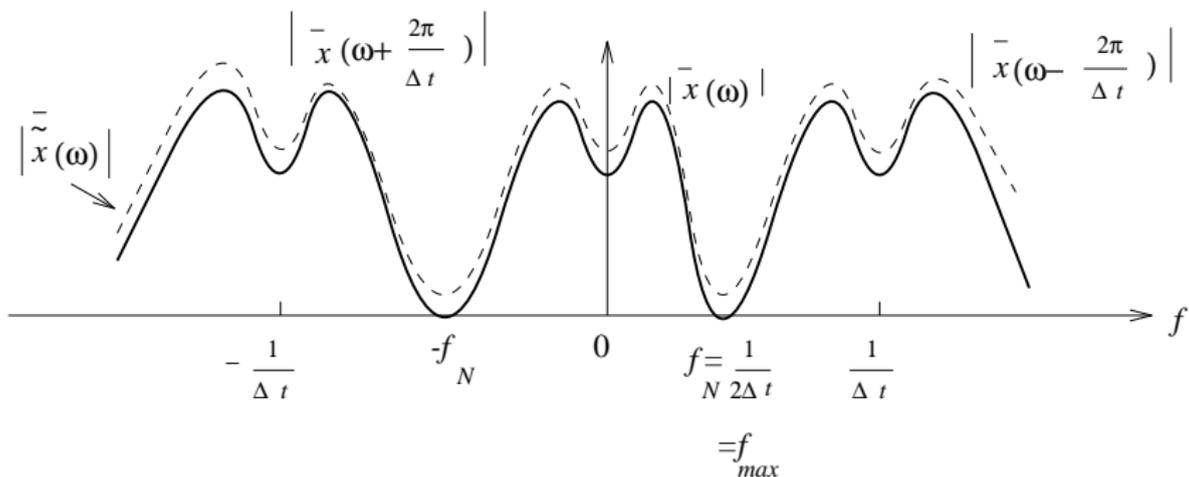
$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \bar{x}(\omega) * \bar{K}(\omega). \quad (4-5)$$

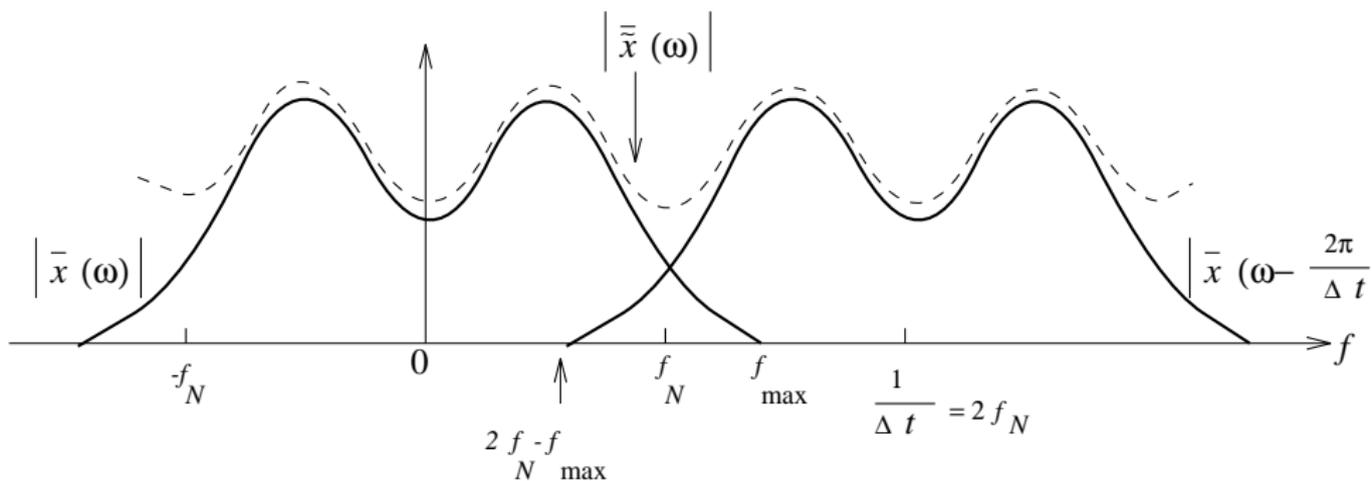
Mit (4-4) ergibt sich:

$$\bar{\tilde{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(\omega - \omega') \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega' - n\frac{2\pi}{\Delta t}\right) d\omega' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{x}\left(\omega - n\frac{2\pi}{\Delta t}\right)$$

$\bar{\tilde{x}}(\omega)$ ist also die Superposition von $\bar{x}(\omega)$ und unendlich vielen, jeweils um $\frac{2\pi}{\Delta t}$ verschobenen Versionen hiervon. Damit ist $\bar{\tilde{x}}(\omega)$ periodisch, im Gegensatz zu $\bar{x}(\omega)$, und die Periode ist $\frac{2\pi}{\Delta t}$, also die Kreisfrequenz zur Abtastfrequenz $\frac{1}{\Delta t}$.

Richtige Abtastung liegt vor, wenn sich – wie im oberen Bild auf S.164 für den Betrag von $\bar{x}(\omega)$ als Funktion der Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ – die einzelnen Bänder von $\bar{x}(\omega)$ nicht überlagern. Das Spektrum von $\bar{x}(\omega)$ stimmt dann vollständig mit dem zentralen Band von $\bar{x}(\omega)$ überein. Die Bedingung hierfür ist, daß $\bar{x}(\omega)$ bei der Nyquistfrequenz f_N auf Null abgeklungen ist. Ist dies nicht der Fall, wie im zweiten Bild auf S.164, so sind $\bar{x}(\omega)$ und $\bar{x}(\omega)$ verschieden. Die spektrale Energie in $x(t)$ zwischen f_N und f_{\max} führt dazu, daß sich die Bänder von $\bar{x}(\omega)$ überlappen und daß für Frequenzen von $2f_N - f_{\max}$ bis f_{\max} für $\bar{x}(\omega)$ und $\bar{x}(\omega)$ nicht identisch sind: hochfrequente Energie in $\bar{x}(\omega)$ erscheint als tieffrequente Energie in $\bar{x}(\omega)$. Diese Folge von zu grober Abtastung nennt man **Aliasing**, auf deutsch etwa "Wolfimspfanzing".





In dem unteren Bild enthält $x(t)$ höhere Frequenzen als im oberen Bild.

Damit $\bar{x}(\omega)$ mit $\tilde{x}(\omega)$ übereinstimmt bzw. Aliasing nicht auftritt, muß also Folgendes erfüllt sein (**Abtasttheorem**):

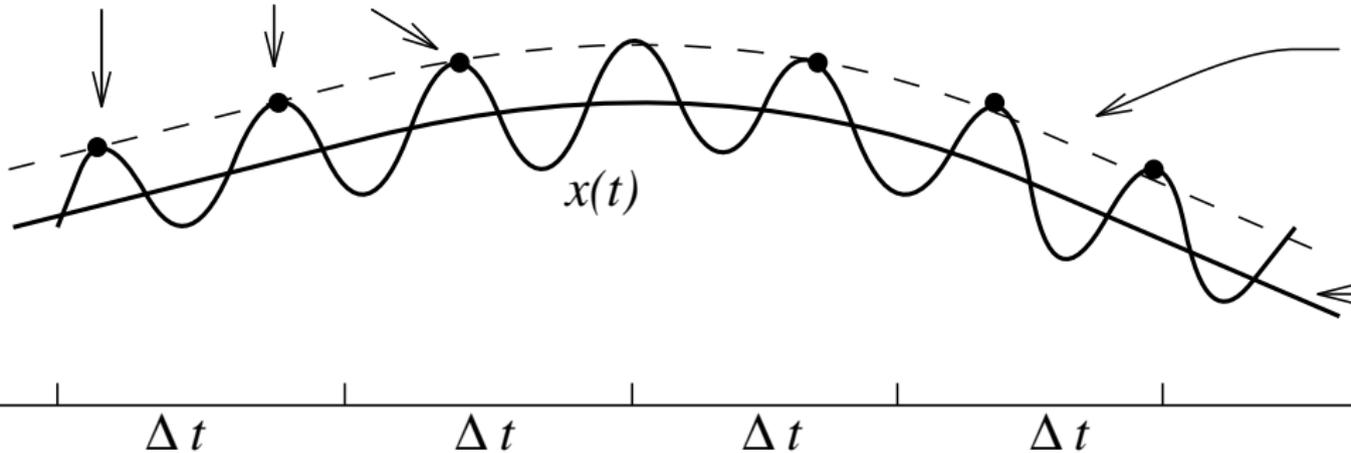
- 1 $x(t)$ muß bandbegrenzt sein, d.h. es muß ein endliches f_{\max} geben mit $\bar{x}(\omega) = 0$ für $f > f_{\max}$.
- 2 Das Abtastintervall Δt muß so gewählt werden, daß die Nyquistfrequenz $f_N = \frac{1}{2\Delta t} \geq f_{\max}$ ist.

Wenn Δt vorgegeben ist (das ist der Normalfall bei digitalen Datenerfassungsanlagen), muß eventuell vorhandene Energie jenseits von f_N durch einen (elektronisch realisierten) **Anti-Alias-Filter** vor der Digitalisierung weggefiltert werden. f_N ist die höchste Frequenz, die mit Δt aufgelöst werden kann.

Beispiel für Aliasing

Aliasing läßt sich an einem ganz einfachen Beispiel veranschaulichen. $x(t)$ sei die Superposition eines nieder- und eines hochfrequenten Anteils wie in der folgenden Skizze. Die Frequenz des hochfrequenten Anteils ist höher als die Nyquistfrequenz zum angegebenen Δt . Die abgetasteten Punkte täuschen eine größere Amplitude des niederfrequenten Anteils vor als in Wirklichkeit; lägen sie in den Minima, so wäre diese Amplitude kleiner als in Wirklichkeit.

abgetastete Punkte



Sinc-Interpolationsformel

Abtastung bedeutet Informations**reduktion** von den unendlich vielen Werten einer Funktion $x(t)$ auf endlich viele (bei endlich langem $x(t)$). Wenn die Abtastung im Einklang mit dem Abtasttheorem erfolgt, ist damit aber kein Informations**verlust** verbunden, denn die Werte von $x(t)$ zwischen den Stützstellen können aus den abgetasteten Werten rekonstruiert werden. Das sieht man am Fourier-Integral von $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \bar{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4-6)$$

$\omega_N = 2\pi f$ ist die Nyquistkreisfrequenz.

Wegen der Bandbegrenztheit von $x(t)$ können die Integrationsgrenzen auf $\pm\omega_N$ zusammengezogen werden, und in diesem Frequenzband ist wegen der korrekten Abtastung $\bar{x}(\omega) = \tilde{x}(\omega)$. Da in $\tilde{x}(\omega)$ nur die Information von den Stützstellen enthalten ist, t aber beliebig sein kann, bedeutet (4-6) tatsächlich die vollständige Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Stützwerten. Der entscheidende Punkt ist die Bandbegrenztheit: sie läßt zwischen den Stützstellen keine beliebigen, sondern nur hinreichend glatte Verläufe zu.

Mit der Fourier-Transformierten der Zeitreihe,

$$\bar{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \delta(t - k\Delta t) e^{-i\omega t} dt = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{-i\omega k\Delta t},$$

kann man (4-6) in die Sinc-Interpolationsformel umrechnen, die $x(t)$ direkt mit den Stützwerten x_k verknüpft:

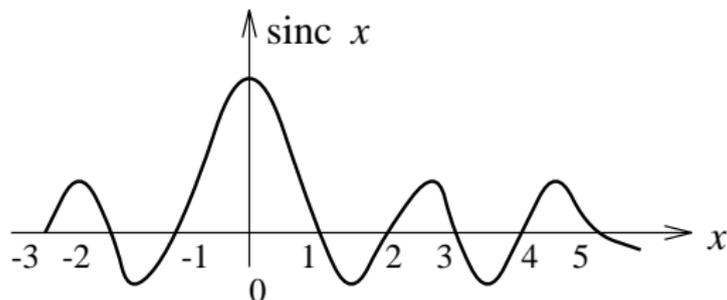
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \int_{-\omega_N}^{+\omega_N} e^{i(t-k\Delta t)\omega} d\omega \\ &= \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \left. \frac{\sin [(t - k\Delta t)\omega]}{t - k\Delta t} \right|_{-\omega_N}^{+\omega_N} \end{aligned}$$

Mit $\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}$ ergibt sich

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin\left(\pi \frac{t-k\Delta t}{\Delta t}\right)}{\pi \frac{t-k\Delta t}{\Delta t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{sinc} \frac{t-k\Delta t}{\Delta t}. \quad (4-7)$$

Das ist die **Sinc-Interpolationsformel**, benannt nach der Funktion

$$\operatorname{sinc} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$



An jeder Stützstelle $t = j\Delta t$ ergibt sich der zugehörige Stützwert,

$$x(j\Delta t) = x_j,$$

denn in (4-7) haben alle *sinc*-Gewichte für $k \neq j$ den Wert Null, und für $k = j$ ist das Gewicht 1. Zwischen den Stützstellen wird mit Gewichten ungleich Null interpoliert.

Die Sinc-Interpolationsformel (4-7) liefert eine relativ aufwendige Interpolation zwischen den Stützstellen von $x(t)$, auch wenn man sich in der Praxis nur auf einige Stützstellen in der Nähe des interessierenden t -Werts beschränkt. Die lineare Interpolation zwischen je zwei benachbarten Stützstellen (oder die parabolische zwischen je drei) erfordert weniger Aufwand und ist auch für viele praktische Zwecke ausreichend. Das Besondere an (4-7) ist, daß $x(t)$ hiernach keine spektrale Energie oberhalb der Nyquistfrequenz hat. Lineare und auch parabolische Interpolation erzeugen kein so glattes $x(t)$: hier treten an allen oder an einigen Stützstellen Knicke auf, die eine Quelle hoher Frequenzen, auch oberhalb der Nyquistfrequenz, sind.

Aufgabe 5: Man erzeuge und diskutiere Aliasing, indem man das Spektrum des Impulses

$$X(t) = \sin \frac{2\pi}{T_0} t \cdot e^{-\frac{t^2}{T_1^2}}$$

mit $T_0 = 0.04$ s und $T_1 = 0.06$ s für verschiedene Kombinationen von LX (= Länge von $X(t)$) und Δt (= Zeitintervall) berechnet. $LX \Delta t = 0.128$ s, $LX = 64, 32, \dots, 4$. Man plote in jedem Fall $X(t)$ und den Betrag des Spektrums, letzteren bis zur Abtastfrequenz. Man übertrage das exakte Spektrum ($LX = 64$) in den Plot für $LX = 16$ und vergleiche.

Übertragungsfunktion und Impulsantwort

Ein Filter erzeugt aus einer Funktion $x(t)$, der Eingangsfunktion (engl. “input”), eine neue Funktion $y(t)$, die Ausgangsfunktion (engl. “output”). Dabei wird der Spektralgehalt auf gewünschte Weise verändert, d.h. die Fourier-Transformierten $\bar{x}(\omega)$ und $\bar{y}(\omega)$ unterscheiden sich, und zwar normalerweise markant. Zum Beispiel läßt ein Tiefpaß filter tiefe Frequenzen durch, d.h. bei tiefen Frequenzen gilt $\bar{y}(\omega) = \bar{x}(\omega)$, und hohe Frequenzen werden gesperrt, d.h. bei ihnen gilt $\bar{y}(\omega) = 0$ oder ≈ 0 , auch wenn $\bar{x}(\omega) \neq 0$ ist.

Alle physikalischen Systeme haben eine Filterwirkung. Beispiele sind ein Seismograph, der eine Bodenverschiebung in ein Seismogramm umwandelt, oder ein elektrischer Verstärker, der aus einer Eingangsspannung eine Ausgangsspannung macht. Physikalische Systeme sind **Analogfilter** und werden gelegentlich auch heute noch zur Realisierung gewünschter Filterwirkungen verwandt. Viel gebräuchlicher sind aber **Digitalfilter**, bei denen die Filterung numerisch durchgeführt wird.

Ein **lineares Filter** ist dadurch charakterisiert, daß der Quotient aus Ausgangs- und Eingangsspektrum,

$$\bar{F}(\omega) = \frac{\bar{y}(\omega)}{\bar{x}(\omega)}, \quad (5-1)$$

unabhängig vom Eingangsspektrum $\bar{x}(\omega)$ und damit eine Kenngröße des Filters ist. $\bar{F}(\omega)$ heißt **Übertragungsfunktion** des Filters.

(5-1) stellt eine lineare Beziehung zwischen den Spektren von Eingang und Ausgang dar. Aus (5-1) folgt auch die Formulierung von Linearität im Zeitbereich: Wenn zum Eingang $x_i(t)$ der Ausgang $y_i(t)$ gehört, $i = 1, 2$, so zum Eingang $ax_1(t) + bx_2(t)$ der Ausgang $ay_1(t) + by_2(t)$ (a und b sind reelle Konstanten). Dies ist das **Superpositionsprinzip** für lineare Filter.

Amplitude und Phase

Die Aufspaltung der Übertragungsfunktion (5-1) nach Betrag und Phase,

$$\bar{F}(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad (5-2)$$

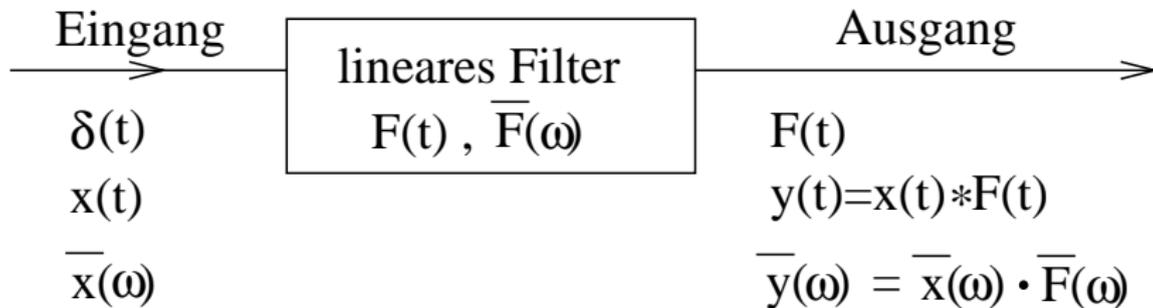
liefert die **Amplitudencharakteristik** $A(\omega)$ und die **Phasencharakteristik** $\varphi(\omega)$ des linearen Filters.

Die inverse Fourier-Transformierte von $\bar{F}(\omega)$,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

heißt **Impulsantwort** des Filters, da sie dem Eingang $x(t) = \delta(t)$ entspricht. Denn dann ist $\bar{x}(\omega) = 1$, $\bar{y}(\omega) = \bar{F}(\omega)$ nach (5-1) und damit $y(t) = F(t)$. Die Übertragungsfunktion eines Filters ist die Fourier-Transformierte seiner Impulsantwort. Beide Funktionen sind also äquivalente Charakterisierungen eines Filters.

Vergleicht man das bisher Gesagte mit den Aussagen über lineare Systeme in Abschnitt (3), so sieht man, daß die Begriffe lineares System und lineares Filter synonym sind. Die Veranschaulichung der Eingangs-Ausgangs-Beziehung eines Filters durch ein Blockdiagramm ist daher analog zur Skizze auf S.152:



Die Filteroperation lautet im Frequenzbereich:

$$\bar{y}(\omega) = \bar{x}(\omega) \cdot \bar{F}(\omega). \quad (5-3)$$

Spektrum
des Ausgangs } = { Spektrum
des Eingangs } mal Übertragungsfunktion

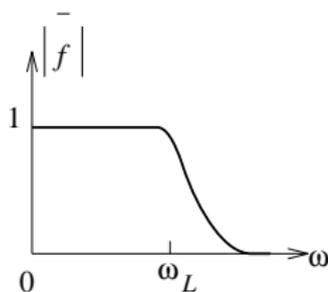
Im Zeitbereich gilt:

$$y(t) = x(t) * F(t). \quad (5-4)$$

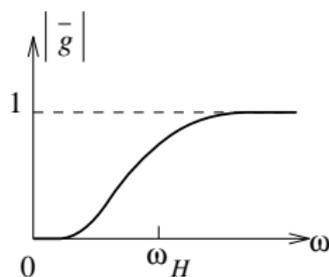
Ausgang = Eingang gefaltet mit Impulsantwort

Die Filterung kann praktisch sowohl im Frequenzbereich nach (5-3) als auch im Zeitbereich nach (5-4) durchgeführt werden. Die Berechnung synthetischer Seismogramme in den Aufgaben 3 und 4 kann man als eine Filterung auffassen: In der Aufgabe 3 wird sie im Frequenzbereich, in der Aufgabe 4 im Zeitbereich durchgeführt. Bei langen Zeitfunktionen $x(t)$ und – relativ dazu – kurzen Impulsantworten $F(t)$ ist die Faltung nach (5-4) ökonomischer.

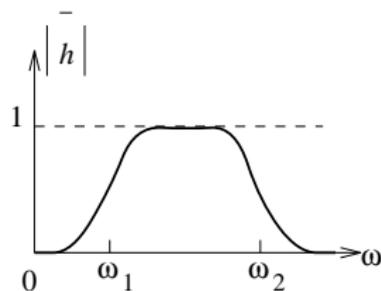
Wichtige Filter sind **Tiefpaß**, **Hochpaß** und **Bandpaß**. Ihre Amplitudencharakteristiken $A(\omega) = |\overline{F}(\omega)|$ sehen wie folgt aus (Tiefpaß: $\overline{F} = \overline{f}$, Hochpaß: $\overline{F} = \overline{g}$, Bandpaß: $\overline{F} = \overline{h}$):



Tiefpaß



Hochpaß

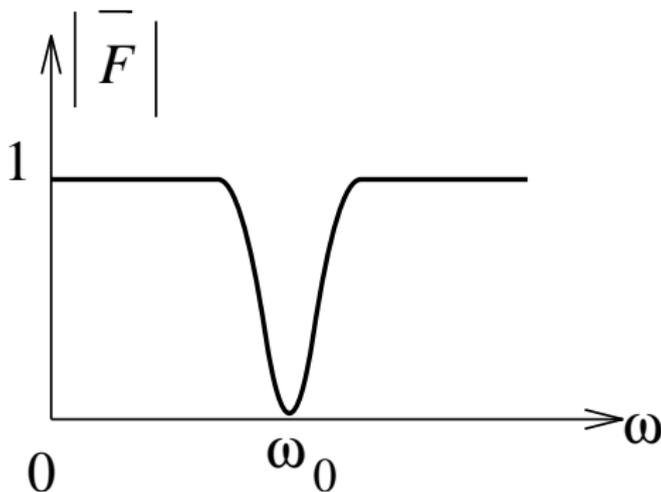


Bandpaß

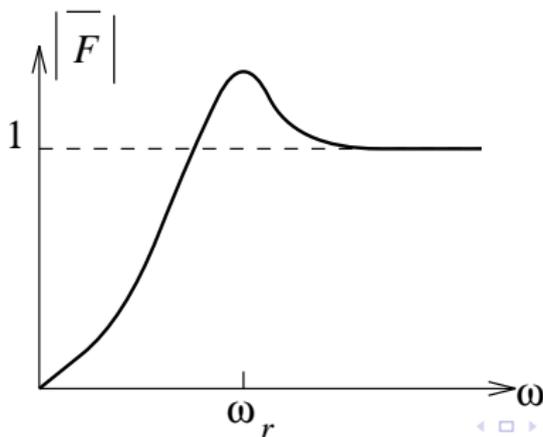
Diese Filter haben einen **Durchlaßbereich**, in dem $A = 1$ (oder $A \approx 1$) ist, und einen **Sperrbereich** mit $A = 0$ (oder $A \ll 1$). Diese Bereiche werden durch **Grenzfrequenzen** (ω_L oder ω_H oder $\omega_{1,2}$) voneinander getrennt, und im Bereich der Grenzfrequenzen kann die Flankensteilheit der Amplitudencharakteristik verschieden groß sein.

Spezielle Formen von Tief-, Hoch- und Bandpaß einschließlich ihrer Impulsantworten werden in späteren Abschnitten und Programmierübungen behandelt.

Ein weiterer, praktisch wichtiges Filter ist das **Notch**-Filter (engl. notch = Kerbe). Es entfernt eine spezielle Frequenz (ω_0 in nachfolgender Skizze) aus dem Filtereingang, z.B. 50Hz als Folge von Einstreuungen aus dem Stromnetz.



Schließlich sei noch der **harmonische Oszillator** als physikalischer Analogfilter erwähnt, der z.B. als mechanischer Schwinger in einem Seismometer realisiert ist. Die dargestellte Charakteristik entspricht einem Hochpaß mit Resonanzüberhöhung bei der Resonanzfrequenz ω_r (bei Seismometern vermeidet man die Resonanzüberhöhung).



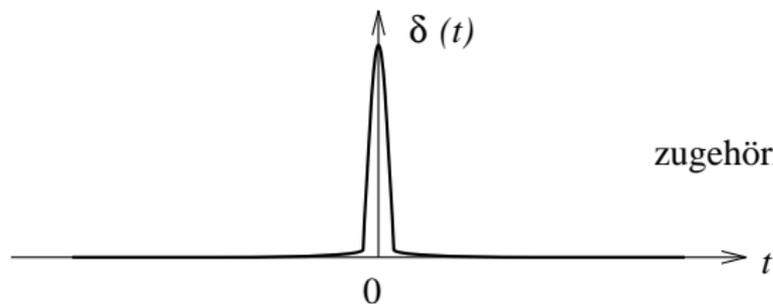
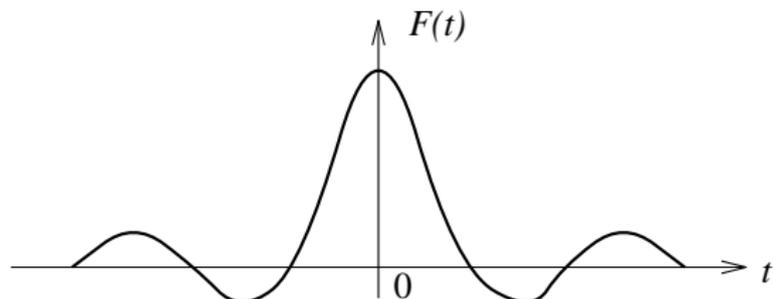
Akausale Filter – Grundlagen

Wir betrachten im Folgenden besonders einfache Filter, nämlich solche mit der Phasencharakteristik $\varphi(\omega) \equiv 0$. Ihre Übertragungsfunktion $\bar{F}(\omega)$ ist reell nach (5-2), und da wir hier reelle Zeitreihen betrachten gilt dann mit (2-11) $\bar{F}(-\omega) = \bar{F}(\omega)^*$, d.h. $\bar{F}(\omega)$ ist gerade.

Für die Impulsantwort solcher Filter gilt:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (5-5)$$

Hieraus folgt: $F(-t) = F(t)$. Damit ist auch $F(t)$ eine gerade Funktion.



zugehöriger Filtereingang

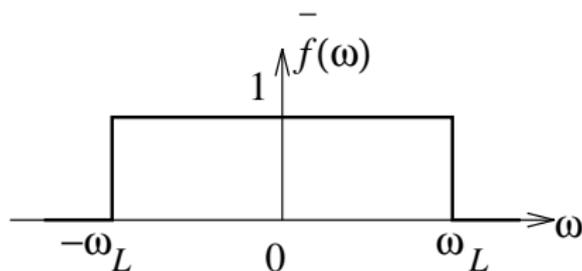
Vergleicht man $F(t)$ mit dem Eingang $\delta(t)$, so sieht man, daß das Filter **akausal** ist: die Filterwirkung beginnt **vor** der Ursache. Filter ohne Phasenverschiebung sind immer akausal. Bei einem **kausalen** Filter verschwindet $F(t)$ für $t < 0$. Akausalität ist nur bei digitalen Filtern möglich, Analogfilter sind immer kausal.

In der Praxis hat $\varphi(\omega) \equiv 0$ die erwünschte Folge, daß Extremwerte des Filtereingangs zeitlich kaum verschoben werden. Die Akausalität ist aber eine unerwünschte Eigenschaft; z.B. verschieben sich bei der Filterung von Seismogrammen die Einsatzzeiten von Wellengruppen. Wir werden später kausale Filter behandeln und dabei sehen, daß der Preis für Kausalität Phasenverschiebungen, auch und gerade von Extremwerten, sind. Ein Filter ohne Nachteile gibt es also nicht.

Akausaler Tiefpaß – Idealer Tiefpaß

Der ideale Tiefpaß hat als Übertragungsfunktion eine Rechteckfunktion:

$$\bar{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\omega_L \leq \omega \leq \omega_L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5-6)$$

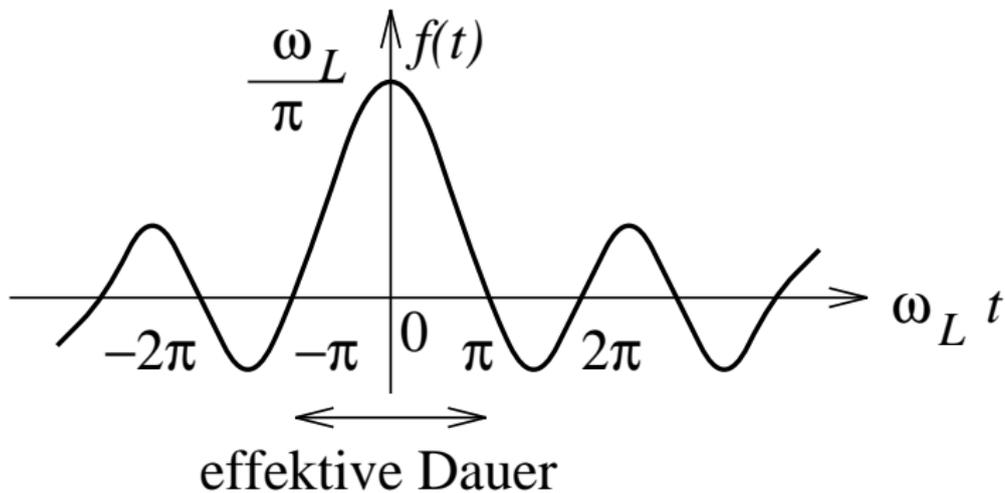


Die Flankensteilheit bei $\pm\omega_L$ ist unendlich, Durchlaß- und Sperrbereich sind scharf getrennt; daher heißt der Tiefpaß ideal. Seine Impulsantwort ist nach (5-5):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_L}^{+\omega_L} e^{i\omega t} d\omega \quad (5-7)$$

also

$$f(t) = \frac{1}{2\pi t} \sin \omega t \Big|_{-\omega_L}^{+\omega_L} = \frac{\omega_L}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_L t}{\omega_L t}. \quad (5-8)$$



Zur Rechteckfunktion im Frequenzbereich gehört also die $\frac{\sin x}{x}$ -Funktion im Zeitbereich; das ist komplementär zu Resultaten auf S. 65, wonach zur Rechteckfunktion im Zeitbereich die $\frac{\sin x}{x}$ -Funktion im Frequenzbereich gehört. Hier gilt daher ebenfalls (2-14) für das Produkt von Bandbreite im Frequenzbereich ($\Delta f = \frac{2\omega_L}{2\pi}$) und effektiver Dauer im Zeitbereich ($\Delta T = \frac{2\pi}{\omega_L}$):

$$\Delta f \cdot \Delta T = 2. \quad (5-9)$$

Je breiter also der Tiefpaß ist, desto kürzer ist seine Impulsantwort, und umgekehrt.

Für die Tiefpaßfilterung einer Zeitreihe $\tilde{x}(t)$, realisiert durch eine Faltung, braucht man die Zeitreihe von $f(t)$ in (5-8), den **Filteroperator** des idealen Tiefpasses:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(t - k\Delta t). \quad (5-10)$$

Die **Filterkoeffizienten** f_k lauten (unter Verwendung der Nyquist-Kreisfrequenz $\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}$):

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \frac{\omega_L}{\pi} \\ f_k &= \frac{\omega_L}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(k\pi \frac{\omega_L}{\omega_N}\right)}{k\pi \frac{\omega_L}{\omega_N}} \end{aligned} \right\}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5-11)$$

da $t_k = k\Delta t = k\pi/\omega_N$. Es muß sein: $\omega_L < \omega_N$ (warum?).

Realer Tiefpaß

Der Filteroperator (5-10) ist im Zeitbereich unendlich lang, und seine Koeffizienten (5-11) klingen nur relativ langsam mit wachsendem $|k|$ ab. Das ist für die Praxis ungünstig. Man multipliziert daher $\tilde{f}(t)$ mit einer **Fensterfunktion**, die für $|t| < T = \kappa\Delta t$ ungleich Null ist, für $|t| > T$ aber verschwindet.

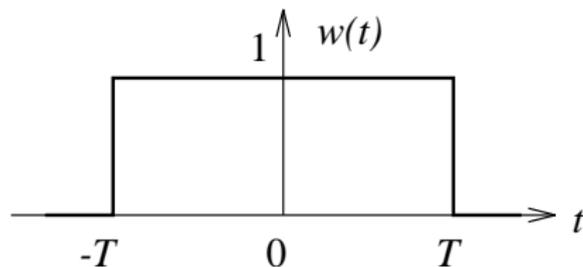
Recheckfenster

Recheckfenster:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Koeffizienten:

$$w_k = \begin{cases} 1 & \text{für } |k| \leq \kappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

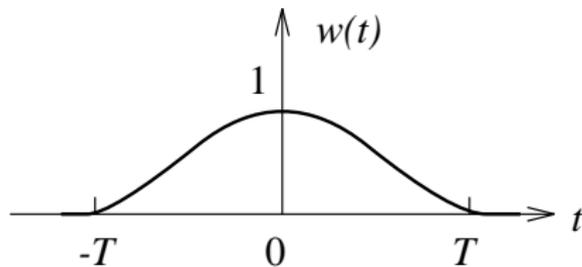


Cosinus-Fenster

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi t}{T}\right) & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Koeffizienten:

$$w_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi k}{\kappa}\right) & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Parzen-Fenster

$$w(t) = \begin{cases} 1 - 6 \left| \frac{t}{T} \right|^2 + 6 \left| \frac{t}{T} \right|^3 & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ 2 \left(1 - \left| \frac{t}{T} \right| \right)^3 & \text{für } \frac{T}{2} \leq |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Verlauf ist ähnlich wie beim Cosinus-Fenster, aber mit schnellerem Abklingen.

Der reale Tiefpaß hat die Filterkoeffizienten $w_k f_k$ mit f_k aus (5-11) ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \kappa$).

Das Rechteck-Fenster hat den Nachteil, daß es bei $t = \pm T$ scharf abschneidet. Der Nachteil von Cosinus- und Parzen-Fenster ist, daß sie nur bei $t = 0$ den Wert 1 haben und dann sofort abklingen. Durch eine Kombination beider Fenstertypen kann man beide Nachteile vermeiden.

Die Veränderungen, die der Filteroperator des idealen Tiefpasses durch ein Fenster erfährt, müssen sich auch in der Übertragungsfunktion bemerkbar machen. Da das Fenster im Zeitbereich aufmultipliziert wird, entsteht die modifizierte Übertragungsfunktion durch Faltung von (5-6) mit der Fourier-Transformierten des Fensters. Da Faltung Glättung bewirkt, wird beim realen Tiefpaß z.B. die Flankensteilheit bei $\omega = \pm\omega_L$ endlich.

Maße für Amplitude und Flankensteilheit

Amplitudenänderungen einer Filter-Übertragungsfunktion werden in Dezibel, abgekürzt db, ausgedrückt. Relativ zu einer Referenzamplitude A_0 ist die Amplitude A um

$$20 \lg \frac{A}{A_0} \text{ db} \quad (5-12)$$

verändert; der Logarithmus hat die Basis 10. Es gilt also folgende Tabelle:

A/A_0	1	10	100	1000	0.1	0.01
Amplitudenänderung	0 db	20 db	40 db	60 db	-20 db	-40 db

3db-Punkt

Am sogenannten 3db-Punkt eines Tief- oder Hochpasses hat die Amplitudencharakteristik A um 3 db, relativ zum Wert $A_0 = 1$ im Durchlaßbereich, abgenommen. A folgt also aus der Gleichung

$$20 \lg A = -3$$

und beträgt $1/\sqrt{2} = 0.7079$. Die Amplitude am 3db-Punkt ist damit um ca. 30% erniedrigt. Ein Bandpaß hat zwei 3db-Punkte. Grenzfrequenzen von Filtern (siehe Abbildungen unten auf S.186) werden häufig mit den Frequenzen der 3db-Punkte identifiziert.

Flankensteilheit

Die **Flankensteilheit** definiert man zunächst für Übertragungsfunktionen (bzw. ihre Beträge) vom Typ $A(\omega) = c \omega^m$ mit reellen Konstanten c und m . Dann gilt

$$\lg A = \lg c + m \lg \omega,$$

d.h. in einem doppeltlogarithmischen Plot ergibt sich eine Gerade mit Steigung m (siehe unten stehende Abbildung links).

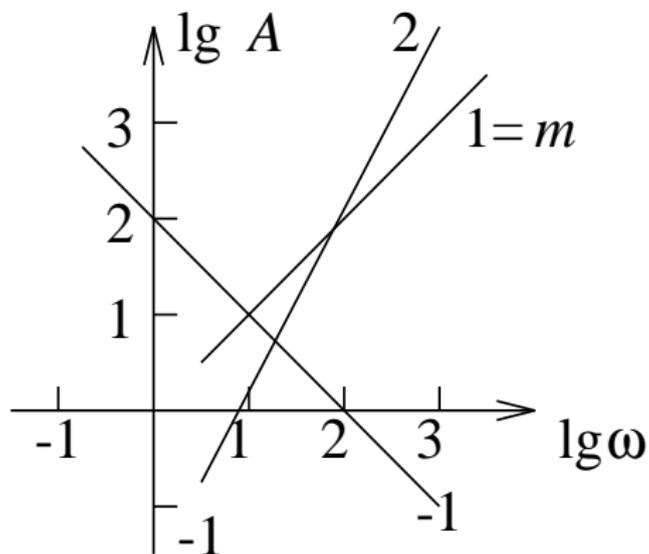
Flankensteilheit

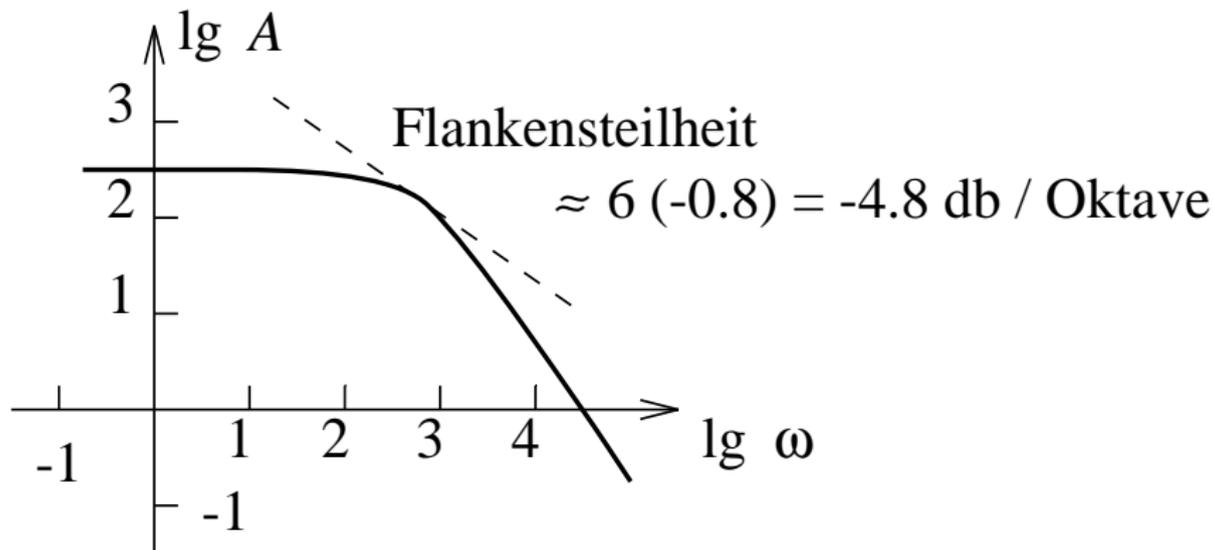
Bei Frequenzverdoppelung, entsprechend 1 Oktave, ändert sich $\lg A$ immer um $m \lg 2$. Die Steigung der Geraden kann man auch durch die Amplitudenänderung pro Oktave, ausgedrückt in db, angeben. Sie beträgt

$$20 \lg \frac{A(2\omega)}{A(\omega)} = 20m \lg 2 = 6.02m \text{ db/Oktave} .$$

So kommt man zu der Faustformel, die auch bei beliebigem $A(\omega)$ gilt:

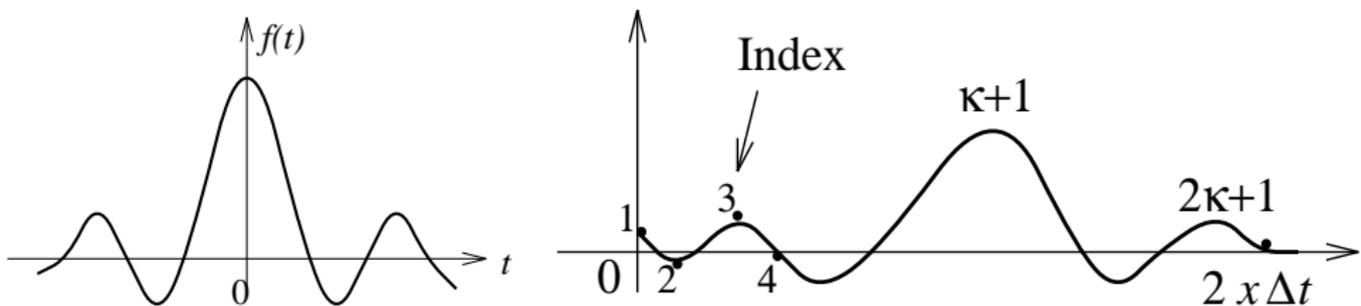
Flankensteilheit = 6 mal Steigung in doppeltlogarithmischen Plot (db/Oktave).





Aufgabe 6:

1) Man schreibe ein FORTRAN-Unterprogramm, das den halben Filteroperator eines Tiefpaß filters berechnet und plottet zu vorgegebenen Werten von ω_N (oder f_N bzw. Δt), ω_L (oder f_L) und κ und wahlweise für das Rechteck- oder Cosinus-Fenster. Der Betrag der Übertragungsfunktion soll ebenfalls geplottet werden. Vor Anwendung von FORK Verschiebung des Filteroperators nach rechts um $\kappa\Delta t$:



In dieser Form ist der Filteroperator auch in Teil 4 zu gebrauchen.

2) Numerische Rechnungen für folgende Zahlenwerte:

$$\Delta t = 0.002 \text{ s}, f_L = 100 \text{ Hz}, \kappa = 10, 20, 30.$$

Man diskutiere qualitativ den Einfluß des Fensters und von κ auf die Übertragungsfunktion. Was ist der Hauptnachteil des Rechteck-Fensters?

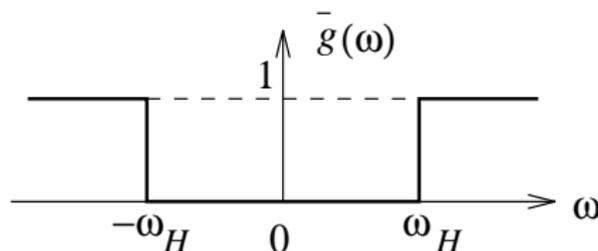
3) Für $\kappa = 10$ und das Cosinus-Fenster zeichne man die Übertragungsfunktion doppeltlogarithmisch und bestimme den 3db-Punkt (d.h. seine Frequenz) und die Flankensteilheit in db/Oktave zwischen 100 Hz und 110 Hz.

- 4) Tiefpaß filterung von synthetischen Seismogrammen:
- Synthetisches Seismogramm wie im Teil 3 der Aufgabe 3 berechnen, hier aber mit $\Delta t = 0.001$ s, $LX = 256$, $LT = 40$.
 - überlagerung einer Störschwingung mit Frequenz 130 Hz und Amplitude 0.5, Plot des gestörten Seismogramms.
 - das Tiefpaß-Unterprogramm einbauen und den Filteroperator berechnen für $\Delta t = 0.001$ s, $f_L = 100$ Hz, $\kappa = 20$ und Cosinus-Fenster, Plot von Filteroperator und Übertragungsfunktion.
 - Faltung des gestörten Seismogramms mit dem Filteroperator, dabei Verwendung des Faltungsprogramms aus der Aufgabe 4 auf S.153, Plot des gefilterten Seismogramms. Warum sind die Reflexionen zeitlich verschoben?

Akausaler Hochpaß

Die Übertragungsfunktion des idealen Hochpasses lautet:

$$\begin{aligned}\bar{g}(\omega) &= \begin{cases} 0 & \text{für } -\omega_H \leq \omega \leq \omega_H \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= 1 - \bar{f}(\omega),\end{aligned}$$



Akausaler Hochpaß

wo $\bar{F}(\omega)$ die Übertragungsfunktion eines idealen Tiefpasses mit der Grenzfrequenz $\omega_L = \omega_H$ ist. Die Impulsantwort ist

$$g(t) = \delta(t) - f(t)$$

mit der Impulsantwort $f(t)$ des idealen Tiefpasses.

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\omega_N}^{-\omega_H} e^{i\omega t} d\omega + \int_{\omega_H}^{\omega_N} e^{i\omega t} d\omega \right] \end{aligned}$$

Akausaler Hochpaß

Damit wird:

$$\begin{aligned}g(t) &= \frac{1}{2\pi t} \sin \omega t \Big|_{-\omega_N}^{-\omega_H} + \frac{1}{2\pi t} \sin \omega t \Big|_{\omega_H}^{\omega_N} \\ &= \frac{\omega_N}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_N t}{\omega_N t} \cdot + \frac{\omega_H}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_H t}{\omega_H t}\end{aligned}$$

Die zugehörige Zeitreihe lautet

$$\tilde{g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k \delta(t - k\Delta t)$$

mit den Filterkoeffizienten ($\omega_H < \omega_N$):

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= \frac{1}{\Delta t} - \frac{\omega_H}{\pi} = \frac{1}{\pi}(\omega_N - \omega_H) \\ g_k &= -\frac{\omega_H}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(k\pi \frac{\omega_H}{\omega_N}\right)}{k\pi \frac{\omega_H}{\omega_N}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

Der reale Hochpaß wird, analog zum realen Tiefpaß, durch Multiplikation der g_k mit den Koeffizienten w_k eines Fensters erhalten.

Akausaler Bandpaß

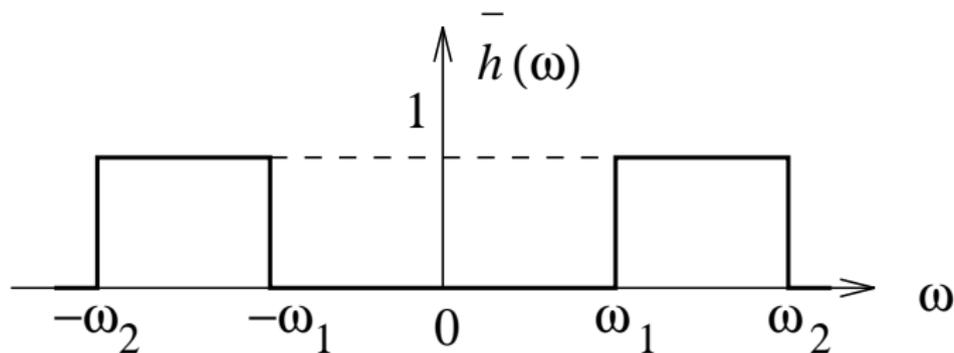
Die Übertragungsfunktion des idealen Bandpasses ist

$$\begin{aligned}\bar{h}(\omega) &= \begin{cases} 1 & \text{für } \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \bar{f}_2(\omega) - \bar{f}_1(\omega),\end{aligned}$$

wo $\bar{f}_i(\omega)$ die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses mit der Grenzfrequenz ω_i ist ($i = 1, 2$).

Akausaler Bandpaß

Übertragungsfunktion des idealen Bandpasses:



Die Impulsantwort ist

$$h(t) = f_2(t) - f_1(t)$$

mit den Tiefpaß-Impulsantworten $f_{1,2}(t)$. Die Zeitreihe zu $h(t)$ lautet

$$\tilde{h}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k \delta(t - k\Delta t)$$

mit den Filterkoeffizienten ($\omega_2 \leq \omega_N$):

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{\pi} (\omega_2 - \omega_1) \\ h_k &= \frac{\omega_2}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(k\pi \frac{\omega_2}{\omega_N}\right)}{k\pi \frac{\omega_2}{\omega_N}} - \frac{\omega_1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(k\pi \frac{\omega_1}{\omega_N}\right)}{k\pi \frac{\omega_1}{\omega_N}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} (5-14)$$

Der reale Bandpaß folgt hieraus wie beim Tief- und Hochpaß.

Tief- und Hochpaß sind Sonderfälle des Bandpasses, vergleiche (5-11), (5-13) und (5-14):

$$\text{Tiefpaß :} \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_L$$

$$\text{Hochpaß :} \quad \omega_1 = \omega_H, \quad \omega_2 = \omega_N$$

Aufgabe 7

1) Erweiterung des Unterprogrammes des Teils 1 der Aufgabe 6 auf S.211, derart, daß man beliebige Bandpässe, einschließlich Tief- und Hochpaß, behandeln kann.

2) Numerische Rechnungen für 3 Bandpässe (halber Filteroperator, Betrag der Übertragungsfunktion):

$\Delta t = 0.001$ s, Cosinus-Fenster, $\kappa = 20$

a) $f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 60$ Hz;

b) $f_1 = 30$ Hz, $f_2 = 80$ Hz;

c) $f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 100$ Hz.

3) Bandpaßfilterung von synthetischen Seismogrammen mit den Bandpässen aus Teil

2. Man nehme dasselbe Schichtenmodell wie im Teil 4 der Aufgabe 6 und rechne mit

$\Delta t = 0.001$ s, $LX = 256$, aber $LT = 20$. Keine Überlagerung von Störschwingungen.

Welche Resultate erwartet man? Wie groß ist die Akausalität der Reflektionen?

Unschärferelation

Je schmaler ein Bandpaß ist, desto genauer ist die Frequenzauflösung der Filterung. Die zeitliche Auflösung wird aber immer schlechter, d.h. der Zeitpunkt, zu dem die herausgefilterten Frequenzen gehören, ist immer weniger scharf definiert. Dies ist der Inhalt der Unschärferelation der Filtertheorie, die nun abgeleitet wird.

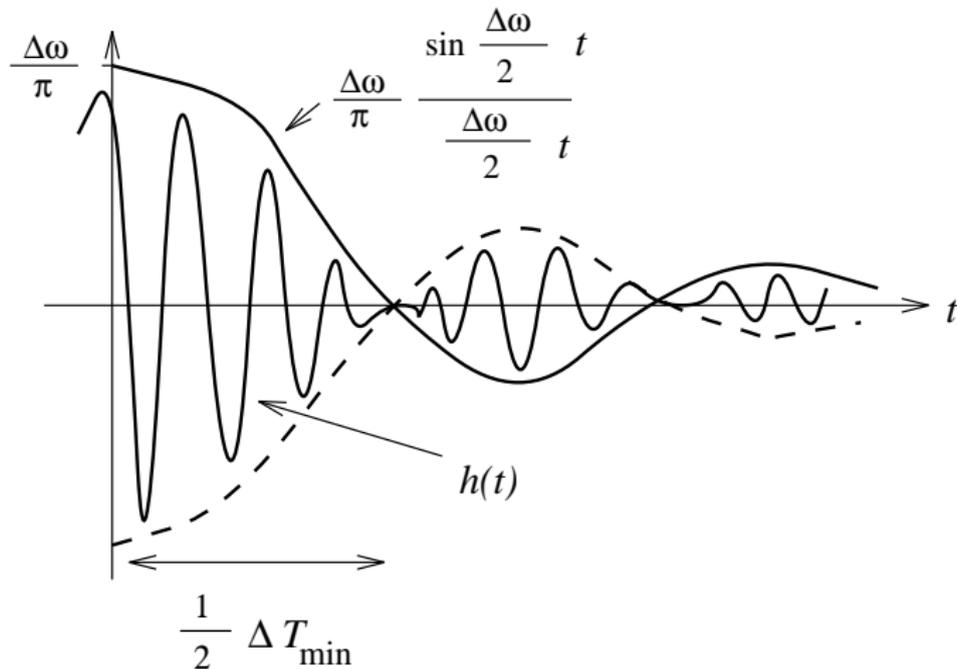
Wir betrachten dazu einen Bandpaß $\bar{h}(\omega)$ der Bandbreite $\Delta f = f_2 - f_1$ bzw. $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ und fragen, wie lang ein mit diesem Bandpaß gefiltertes Signal im Zeitbereich ist; die effektive Länge sei ΔT . Der minimale Wert ΔT_{\min} von ΔT ist die effektive Länge der Impulsantwort $h(t)$, die zum kürzestmöglichen Eingang, der Deltafunktion $\delta(t)$, gehört (die Faltung mit einem beliebigen Eingang $x(t)$, also $h(t) * x(t)$, kann nur zu Verlängerung, nicht aber zu Verkürzung führen). ΔT_{\min} erhält man wie folgt.

Die Impulsantwort des idealen Bandpasses mit den Grenzfrequenzen ω_1 und ω_2 folgt aus Abschnitt (4), zusammen mit (5-8):

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} (\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t)$$

Mit der Bandbreite $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ und dem Mittelwert $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ der Grenzfrequenzen erhält man:

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{1}{\pi t} \left\{ \sin \left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \sin \left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right\} \\&= \frac{1}{\pi t} \left\{ \sin \bar{\omega} t \cos \frac{\Delta\omega}{2} t + \cos \bar{\omega} t \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \right. \\&\quad \left. - \sin \bar{\omega} t \cos \frac{\Delta\omega}{2} t + \cos \bar{\omega} t \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \right\} \\h(t) &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} t}{\frac{\Delta\omega}{2} t} \cdot \cos \bar{\omega} t\end{aligned}\tag{5-15}$$



Die Impulsantwort des Bandpasses ist also eine Cosinus-Schwingung mit der Kreisfrequenz $\bar{\omega}$, deren Amplitude gemäß einer Tiefpaß-Impulsantwort (Grenzfrequenz $\frac{\Delta\omega}{2}$) moduliert ist. Die effektive Länge ΔT_{\min} von $h(t)$ wird durch diese Tiefpaß-Impulsantwort dann bestimmt, wenn, wie in der folgenden Abbildung, $\frac{\Delta\omega}{2}$ deutlich kleiner als $\bar{\omega}$ ist (das ist z.B. bei einem Tiefpaß mit $\omega_1 = 0$ und $\frac{\Delta\omega}{2} = \bar{\omega} = \frac{\omega_2}{2}$ nicht der Fall):

$$\frac{\Delta\omega}{2} \cdot \frac{1}{2} \Delta T_{\min} = \pi$$

Mit $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ wird

$$\Delta f \cdot \Delta T_{\min} = 2. \quad (5-16)$$

Dies gilt nun nach (5-9) auch für einen Tiefpaß, wurde dort aber anders abgeleitet. Man kann also (5-16) als generell gültig ansehen. Aus (5-16) folgt die **Unschärferelation der Filtertheorie** ($\Delta f =$ Bandbreite des Bandpasses, $\Delta T =$ effektive Länge des Ausgangs zu einem beliebigen Eingang, $\Delta T \geq \Delta T_{\min}$):

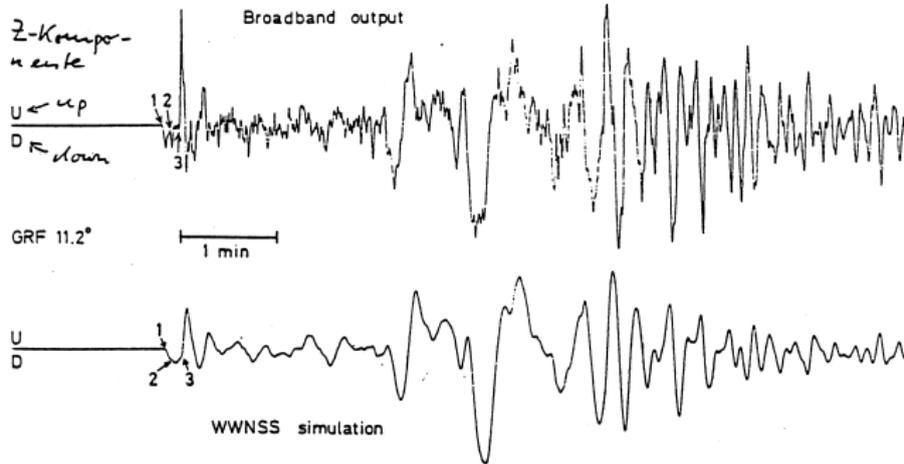
$$\Delta f \cdot \Delta T \geq 2. \quad (5-17)$$

Je schmaler also der Bandpaß ist, desto länger ist das gefilterte Signal, oder: je besser die Frequenzauflösung, desto schlechter die Zeitauflösung.

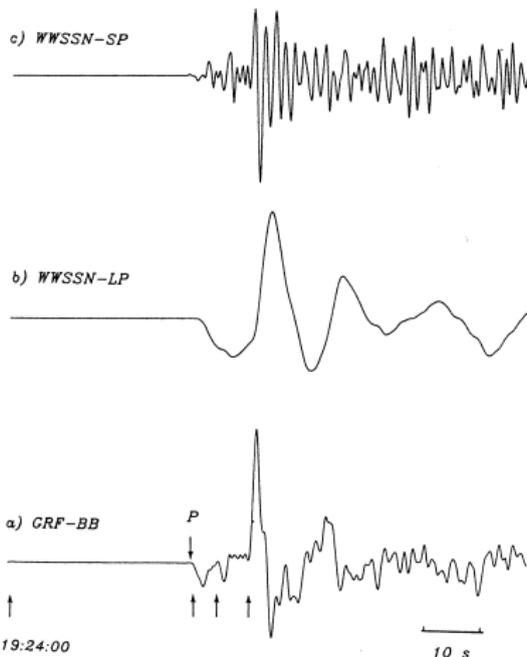
Die Unschärferelation wurde hier für einen speziellen akausalen Bandpaß abgeleitet. Sie ergibt sich aber in der Form (5-17), mit einer Konstanten der Größenordnung 1 auf der rechten Seite, auch für andere, z.B. kausale Bandpässe. Sie ist also eine fundamentale Beziehung.

Aus der Unschärferelation folgt ein wichtiger Schluß für Instrumente, deren Aufzeichnungen eine gute Zeitauflösung haben sollen zur Trennung von eng benachbarten Signalanteilen mit verschiedenem Ursprung (z.B. Seismographen, die seismische Wellen mit unterschiedlichen Laufwegen, aber ähnlichen Einsatzzeiten, registrieren): Sie müssen möglichst breitbandig sein.

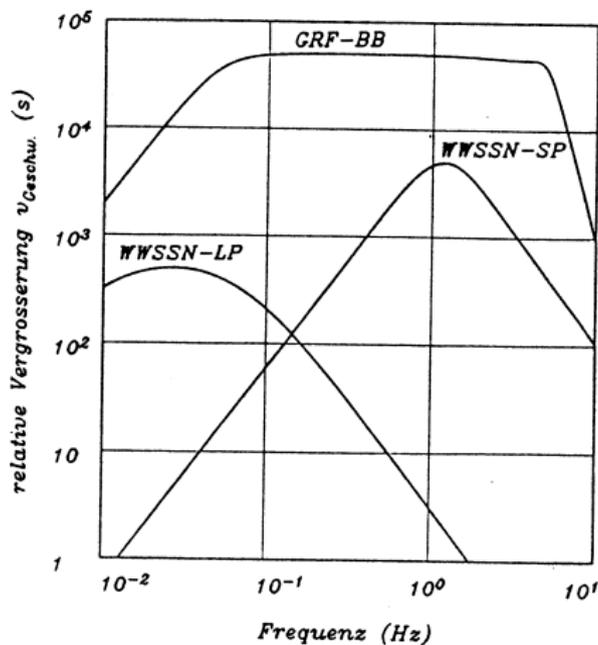
Im folgenden Beispiel ist die untere Spur im Bild oben auf S. 233 das Breitband-Seismogramm der Station GRF (Gräfenberg) für ein Erdbeben in Rumänien am 04.03.1977. Die mit 1, 2, 3 markierten P-Wellen-Einsätze rühren, wie eine Analyse vieler Seismogramme ergab, von 3 Bruchvorgängen an verschiedenen Stellen und zu verschiedenen Zeiten im Bebenherd her. Im Breitband-Seismogramm sind die Einsätze gut aufgelöst, erheblich schlechter dagegen in der unteren Spur, die einem WWNSS-Seismographen entspricht (WWNSS = Worldwide Network of Standard Seismographs; in GRF stand kein solches Instrument, sondern die Spur wurde durch digitale Filterung des Breitband-Seismogramms erzeugt).



Gleiche Registrierung, oben: BB-Seismogram, unten: WWSSN

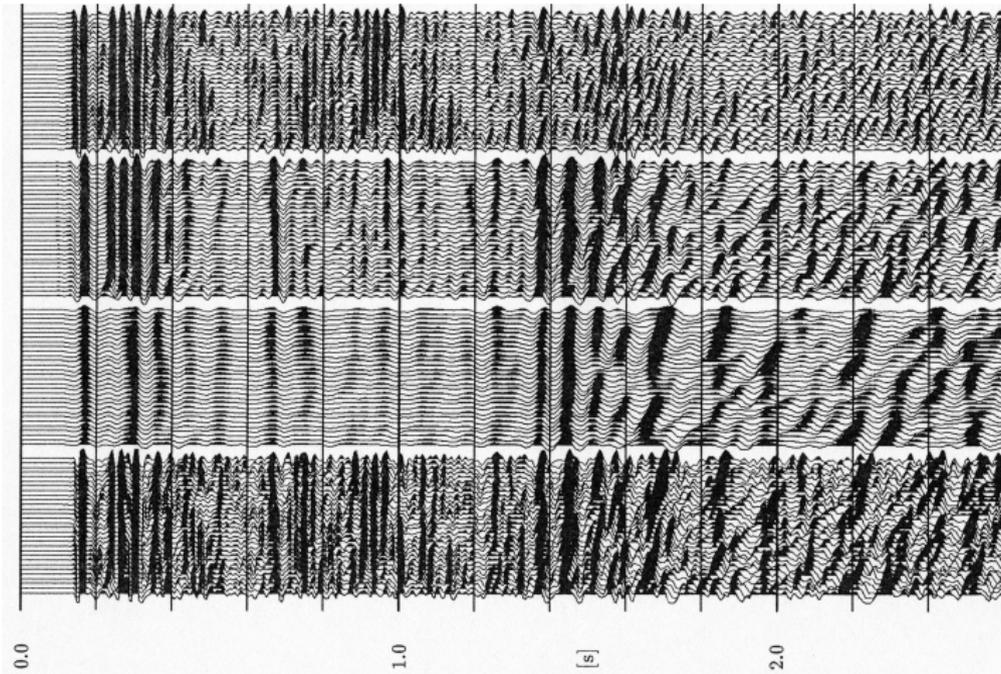


Oben: WWSSN-SP Mitte: WWSSN-LP Unten: GRF-Breitband



Übertragungsfunktionen von Standard-Seismometern

Die untenstehenden Skizzen zeigen die Übertragungsfunktionen des GRF-Breitbandinstruments und des WWNSS-Instruments für den Schwingweg. Die deutlich verschiedenen Bandbreiten sind die Erklärung der unterschiedlichen zeitlichen Auflösung der 3 Einsätze in den beiden Seismogrammen oben.



Bandpass: Originaldaten (oben), 5-15 Hz, 20-30 Hz, 40-50 Hz.